Sammlung Göschen

Ebene Geometrie

Von

G. Mahler
Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm

Mit 110 zweifarbigen Figuren

Vierte, verbesserte Auflage

Neudruck

Berlin und Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.
1913

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Symmetrie und Kongruenz.

II. Abschnitt.

Ähnlichkeit.

III. Abschnitt.

Die geometrische Aufgabe.

Ebene Geometrie.

I. Abschnitt.

Symmetrie und Kongruenz.

1. Kapitel.

Der Kreis. Der geometrische Ort.

§ 1. Entstehung.

1. Wenn sich die Strecke CA um den einen Endpunkt C bis zur Rückkehr in die Anfangslage dreht, so beschreibt der andere Endpunkt den Kreis, und die Strecke selbst erzeugt die Kreisfläche. Der Punkt C wird der Mittelpunkt, das Zentrum, die Strecke CA der Halbmesser, Radius, genannt. Man sagt, der Kreis wird aus dem oder um den gegebenen Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser beschrieben. Alle Radien eines Kreises sind einander gleich.

2. Jede Strecke, welche zwei Punkte des Umfangs verbindet, heißt Sehne; sie zerlegt denselben in zwei Bögen. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so wird sie Durchmesser genannt. Jeder Durchmesser teilt den Umfang in zwei Halbkreise. Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich. (Warum?) Eine Gerade durch einen Punkt innerhalb des Kreises

schneidet den Kreis stets in zwei Punkten; die Gerade heißt Sekante. Geht die Sekante durch das Zentrum, so wird sie zur Zentrale. — Von zwei gleichen Bögen eines und desselben Kreises kann man den einen durch Drehung um das Zentrum zur Deckung mit dem anderen bringen. (Mechanisch mit Hilfe eines Stückchens Pauspapiers.)

3. Forderungssatz. Einen Kreis zu konstruieren, wenn der Mittelpunkt und der Radius gegeben sind; wird mit Hilfe des Zirkels ausgeführt.

4. Ein Punkt liegt entweder auf dem Kreise oder außerhalb oder innerhalb des Kreises, je nachdem sein Abstand vom Zentrum ebensogroß oder größer oder kleiner als der Halbmesser ist.

5. Kreise von gleichen Radien heißen gleich, mit verschieden langen Radien ungleich. Wenn ein Kreis einen anderen schneidet, so erfolgt dies stets in zwei Punkten. Kreise mit demselben Mittelpunkt liegen konzentrisch, mit verschiedenem Mittelpunkt exzentrisch.

6. Man denkt sich den Umfang eines Kreises in 360 gleiche Bögen zerlegt und nennt jeden solchen Teil einen Bogengrad, kurz Grad. Ein Grad (^{0}) hat 60 gleiche Minuten ($'$) und eine Minute 60 gleiche Sekunden ($''$). — Partes minutae primae, partes minutae secundae. — Ein Bogen von 90^0 heißt ein Quadrant, ein solcher von 60^0 ein Sextant usw. — Die Teilung des Umfanges in 360 gleiche Teile läßt sich mit Lineal und Zirkel nicht ausführen.

7. Aufgabe. Einen Punkt zu finden, der von einem gegebenen Punkte A die vorgeschriebene Entfernung e hat. — Lösung. Es gibt unzählig viele Punkte, welche der Aufgabe genügen; alle liegen auf dem Kreise, der um A mit e beschrieben wird.

8. **Der geometrische Ort.** Wenn die Lage eines Punktes vermöge der Bedingungen, die er erfüllen soll, nicht hinreichend bestimmt ist, so ist sie doch oft auf eine Linie beschränkt, auf welcher der Punkt liegen muß. Diese Linie heißt der geometrische Ort des Punktes.

9. Der geometrische Ort des Punktes, der von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung hat, ist der Kreis aus dem gegebenen Punkt mit der gegebenen Entfernung als Radius.

§ 2. Übungen.

1. Auf der gegebenen Geraden L von dem auf ihr liegenden Punkte A aus eine Strecke gleich s abzutragen.

2. Die gegebene Strecke AB zu verdoppeln, zu verdreifachen.

3. Auf der Geraden L den Punkt X zu finden, der von dem gegebenen Punkte A die Entfernung e hat.

4. Die Punkte zu finden, welche von A die Entfernung a und zugleich von B die Entfernung b haben.

5. Die Punkte zu finden, welche von A und B die gleiche vorgeschriebene Entfernung a haben.

6. Die Punkte zu finden, welche von A und B die Entfernung AB haben.

7. In den gegebenen Kreis O eine Sehne von der Länge a einzutragen.

8. Lege in den Kreis O hintereinander Sehnen gleich dem Radius. Wie viele solcher Sehnen erhält man?

9. Mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht.

10. Mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu zeichnen, dessen Zentrum auf einer gegebenen Geraden liegt und der durch einen gegebenen Punkt geht.

11. Halbiere die Strecke AB durch Versuche mit dem Zirkel.

2. Kapitel.
Der Winkel.

§ 3. Entstehung und Bezeichnung.

1. Zwei Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, bilden einen Winkel ($\sphericalangle$). Er ist das Maß der Drehung, durch welche der eine Strahl in die Lage des anderen gebracht wird. Die beiden Strahlen werden die Schenkel, der Punkt Spitze, Scheitel genannt.

Bemerkung. Strenggenommen bilden die beiden Strahlen zwei Winkel. Fig. 1.

2. Bezeichnet wird der Winkel a) durch drei große lateinische Buchstaben, von denen derjenige, welcher an mittlerer Stelle genannt wird, am Scheitel, die beiden anderen an beliebigen Punkten der Schenkel stehen, z. B. Fig. 1 $\sphericalangle ABC$ oder $\sphericalangle CBA$; b) wenn kein Mißverständnis obwalten kann, durch den Scheitelbuchstaben allein, z. B. $\sphericalangle B$; c) durch einen kleinen griechischen Buchstaben, der zwischen die Schenkel nahe dem Scheitel gesetzt wird, z. B. $\sphericalangle \alpha$.

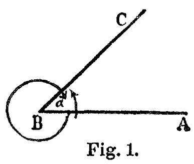


Fig. 1.

3. Die Größe des Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig.

4. Bemerkung. Die Bezeichnung der Punkte mit großen, der Strecken mit kleinen lateinischen und der Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben rührt von Euler (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg) her.

§ 4. Einteilung der Winkel.

1. Wenn man sich in Fig. 1 den Strahl BA um B so weit gedreht vorstellt, bis er mit seinem Gegenstrahl

zusammenfällt, so heißt der erzeugte Winkel ein gestreckter oder flacher. Führt der Schenkel BA eine volle Drehung aus, so nennt man den entstandenen Winkel einen vollen. Alle flachen Winkel sind einander gleich, ebenso die vollen. Der hohle (konkave) Winkel ist kleiner, der erhabene (konvexe) größer als der flache.

2. Die Hälfte des gestreckten Winkels heißt ein rechter Winkel (R). Die Schenkel eines rechten Winkels stehen senkrecht ($\perp$) aufeinander; der eine ist das Lot, die Senkrechte des anderen; der Scheitel wird Fußpunkt genannt. — Alle rechten Winkel sind einander gleich. (Warum?) — Der spitze Winkel ist kleiner, der stumpfe größer als ein rechter; beide Arten heißen schiefe Winkel.

3. Folgerungen. In einem Punkt einer Geraden gibt es auf dieser nur ein Lot. Ein gestreckter Winkel ist gleich $2R$, ein voller gleich $4R$.

4. Bemerkung. Das Ziehen von Senkrechten erfolgt auf mechanischem Wege mit Hilfe desjenigen Instruments, das man „Winkel" („Schiebdreieck") zu nennen pflegt.

§ 5. Winkelvergleichung.

1. Denkt man sich einen Winkel auf einen anderen gelegt, und es decken sich hierbei die Schenkel paarweise, so sind die Winkel gleich.

2. Zieht man durch den Scheitel eines Winkels eine Gerade, die in die Winkelfläche fällt, so wird der Winkel in zwei Teile zerlegt. Die Gerade, welche einen Winkel in zwei gleiche Teile zerlegt, ihn halbiert, heißt Mediane, Winkelhalbierende.

3. Wird ein Winkel so auf einen zweiten gelegt, daß die Scheitel und ein Paar der Schenkel zusammen-

fallen, und es deckt dabei der erste Winkel nur einen Teil des zweiten, so ist der erste kleiner als der zweite und dieser größer als jener.

§ 6. Winkel und Kreis.

1. Zieht man, Fig. 2, in dem Kreise C die Strahlen CA und CB, so wird der von ihnen gebildete Winkel ACB ein Zentriwinkel und der Bogen AB der zum Winkel gehörige Bogen genannt. Ist ferner in demselben Kreise Bogen DE gleich Bogen AB und zieht man die Strahlen CD und CE, so ist $\sphericalangle DCE = ACB$, weil sie durch eine Drehung um C zur Deckung gebracht werden können. Dabei fallen auch die Sehnen DE und AB zusammen. Hieraus folgt:

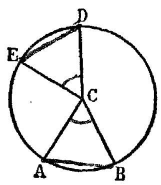


Fig. 2.

In demselben Kreise gehören zu gleichen Bögen gleiche Sehnen und gleiche Zentriwinkel. Der Satz ist auch richtig, wenn die Bögen gleichen Kreisen angehören.

2. Die natürlichste Maßeinheit der Winkel ist der volle Winkel. Derselbe wird in 360 gleiche Winkel zerlegt gedacht, wovon jeder ein Winkelgrad, kurz Grad (^{0}) heißt. Der Grad zerfällt in 60 gleiche Minutenwinkel, Minuten ($'$), und eine Minute in 60 gleiche Sekundenwinkel, Sekunden ($''$).

3. Folgerung. Jeder Winkel hat so viele Grade, Minuten, Sekunden als sein zugehöriger Bogen.

4. Der Transporteur dient zum Messen gezeichneter und zum Zeichnen gemessener Winkel.

§ 7. Operationen mit Winkeln.

1. Aufgabe. Einen Winkel zu übertragen; d. h. an die gegebene Gerade AB in dem gegebenen Punkte A einen Winkel gleich dem gegebenen Winkel CDE anzulegen.

Konstruktion. Um D und A beschreibe mit gleichen Radien Kreise. Der erstere schneidet die Schenkel in C und E, der andere die Gerade in B. Lege hierauf in den Kreis A die Sehne $BF = EC$ und ziehe AF. Es ist $\sphericalangle FAB$ der gesuchte. — Der angetragene Winkel kann vier verschiedene Lagen einnehmen.

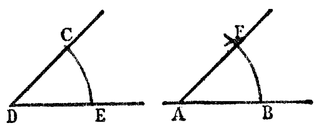


Fig. 3.

2. Die Summe zweier Winkel wird erhalten, wenn man sie so aneinanderlegt, daß sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich haben. Durch wiederholtes Aneinanderlegen läßt sich ein Winkel vervielfachen.

3. Ein kleinerer Winkel läßt sich von einem größeren durch Aufeinanderlegen abziehen. Dabei müssen die Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben.

4. Um einen Winkel in eine Anzahl gleicher Teile zu zerlegen, wird der zugehörige Bogen in die vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile zerlegt. Hierauf verbindet man die Teilpunkte mit dem Scheitel.

5. Bemerkung. Die Halbierung eines Winkels wird später gezeigt. Die Trisektion eines beliebigen Winkels ist mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar.

§ 8. Nebenwinkel, Scheitelwinkel.

Zwei einander schneidende Linien bilden vier Winkel, die paarweise mit dem Namen Neben- bzw. Scheitelwinkel belegt worden sind.

1. *Nebenwinkel* sind zwei hohle Winkel, welche den Scheitel und den Schenkel gemeinsam haben, während die beiden anderen Schenkel eine Gerade bilden. Z. B. Fig. 4 $\sphericalangle\, \alpha$ und β, β und γ, γ und δ, δ und α.

2. Aus der Definition ergibt sich:

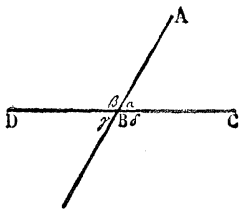


Fig. 4.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist ein flacher Winkel oder gleich $2R$.

3. Folgerung. Nebenwinkel sind im allgemeinen ungleich groß; der eine ist spitz, der andere stumpf. Im besonderen Falle können Nebenwinkel gleich sein, dann ist jeder ein rechter.

4. Kehrsatz. Haben zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam und beträgt ihre Summe $2R$, so bilden die nicht gemeinschaftlichen Schenkel eine Gerade. Beweis!

5. Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel.

6. *Scheitelwinkel* sind zwei hohle Winkel von solcher Lage, daß die Schenkel des einen die Gegenstrahlen der Schenkel des anderen sind. Z. B. Fig. 4 $\sphericalangle\, \alpha$ und γ, β und δ.

7. Durch Anwendung des Satzes 2 dieses Paragraphen erhält man $\sphericalangle\, \alpha + \beta = 2\,R$ und ebenso $\sphericalangle\, \beta + \gamma = 2\,R$. Hieraus folgt $\sphericalangle\, \alpha + \beta = \beta + \gamma$ und damit auch $\sphericalangle\, \alpha = \gamma$, d. h. *Scheitelwinkel sind einander gleich.*

8. Kehre den Lehrsatz von den Scheitelwinkeln um und beweise die Umkehrung!

9. Zwei gleiche Winkel haben auch gleiche Scheitelwinkel.

§ 9. Ergänzungswinkel.

1. Zwei Winkel, deren Summe 1 R ausmacht, heißen komplementär, und jeder von ihnen ist das Komplement des anderen. Zwei Winkel, deren Summe 2 R beträgt, heißen supplementär, und jeder von ihnen ist das Supplement des anderen.

2. Zusatz. Nebenwinkel sind supplementär.

§ 10. Übungen.

1. Wie groß ist der Winkel auf der Windrose zwischen den Richtungen N und ONO?

2. Wie groß sind die beiden Winkel, welche die Zeiger einer Uhr um 3 Uhr oder um 5 Uhr bilden?

3. Berechne den Winkel, den der Stundenzeiger in $1^h\,30'$, der Minutenzeiger in $45'$ zurücklegt.

4. Unter welchem Winkel erscheint uns der Durchmesser der Mond- bzw. der Sonnenscheibe?

5. Der Wegerich zeigt $^3/_8$ Blattstellung, die Eiche $^2/_5$. Wie groß ist der Winkel von einem Blatt bis zum nächsten?

6. α, β, γ sind drei Winkel und es ist $\alpha > \beta > \gamma$. Man bilde $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha + \gamma - \beta$, 2α.

7. Konstruiere die Nebenwinkel, den Scheitelwinkel zu einem gegebenen Winkel!

8. Finde den Supplementwinkel zu einem gegebenen Winkel!

9. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine das Doppelte des anderen; wie groß ist jeder?

10. Es ist $\sphericalangle\,\alpha = 47^0\ 16'\ 33''$. Wie groß ist sein Komplement-, Neben-, Supplementwinkel?

11. Alle Winkel einerseits einer Geraden mit demselben Scheitel geben $2R$ zur Summe.

12. Alle Winkel um einen Punkt betragen $4R$ zusammen.

13. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen senkrecht aufeinander.

14. Die Lote, welche man im Scheitel eines Winkels auf dessen Schenkeln errichtet, schließen einen Winkel gleich dem gegebenen oder das Supplement desselben ein.

15. Die Gerade, welche einen Winkel halbiert, halbiert auch den Scheitelwinkel.

16. Schneiden sich drei Geraden in einem Punkt, so ist die Summe dreier nicht aneinandergrenzender Winkel $2R$.

3. Kapitel.

Von den Figuren im allgemeinen.

§ 11. Bezeichnung.

1. Ein vollständig begrenzter Teil der Ebene heißt **Figur**; der Linienzug, welcher die Grenze darstellt, wird ihr **Umfang** genannt. Je nach dem Umfange werden geradlinig, krummlinig, gemischtlinig begrenzte Figuren unterschieden.

2. Die Strecken, welche eine geradlinige Figur begrenzen, heißen **Seiten**. Je zwei aufeinanderfolgende Seiten schließen einen **Winkel** (Innenwinkel) ein. Die Scheitel der Winkel sind die **Ecken** der Figur. Ist der Winkel an einer Ecke hohl oder erhaben, so wird sie **aus-** bzw. **einspringend** genannt. Im folgenden sind, falls nicht das Gegenteil betont wird, nur Figuren mit lauter ausspringenden Ecken vorausgesetzt. Eine Strecke, die zwei nicht aufeinanderfolgende Ecken ver-

bindet, heißt Diagonale. Die Verlängerung einer Seite bildet mit der nächsten Seite einen Außenwinkel. Strecken, Winkel und der Inhalt einer Figur werden die Stücke derselben genannt.

3. Bezeichnet wird eine geradlinige Figur durch große lateinische an ihre Ecken gesetzte Buchstaben.

4. Jede geradlinige Figur hat ebenso viele Seiten wie Ecken. Zu ihrer Begrenzung sind mindestens drei Seiten nötig.

5. Man teilt die geradlinigen Figuren nach der Zahl ihrer Ecken oder Seiten ein und nennt sie Dreiecke, Vierecke usf., Vielecke (Polygone).

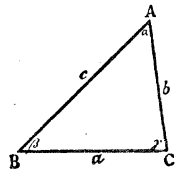


Fig. 5.

6. Im Dreieck (△) liegt jeder Ecke, jedem Winkel eine Seite gegenüber (Gegenseite), während die beiden anderen Seiten den Winkel einschließen. Jeder Seite liegt eine Ecke, ein Winkel gegenüber (Gegenecke, Gegenwinkel), während die beiden anderen Winkel ihr anliegen. Die Bezeichnung der Stücke eines Dreiecks erfolgt in der durch Fig. 5 angegebenen Weise.

7. Jedes Viereck hat zwei Diagonalen.

8. Bemerkung. Unter einer Figur im weiteren Sinne versteht man eine Vereinigung von Punkten und Linien.

§ 12. Übungen.

1. Wie viele Außenwinkel hat ein Dreieck?

2. Warum sind die beiden Außenwinkel, die an einer Ecke liegen, einander gleich?

3. Zeichne ein Viereck mit einer einspringenden, ein Fünfeck mit zwei einspringenden Ecken!

4. Wie viele Diagonalen gibt es im Fünfeck, im Achteck von einer Ecke aus? Wie viele im ganzen?

5. In wie viele Dreiecke zerfällt ein Neuneck durch die von einer Ecke aus gezogenen Diagonalen?

6. Im n-Eck lassen sich von einer Ecke aus $(n-3)$ und im ganzen $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$ Diagonalen ziehen.

7. Jedes n-Eck zerfällt durch die von einer Ecke aus gezogenen Diagonalen in $(n-2)$ Dreiecke.

---

4. Kapitel.

Zentrische Symmetrie.

§ 13. Erklärungen.

1. Der Begriff Figur wird in folgender Erörterung im weiteren Sinne genommen.

2. Drehung in der Ebene ist eine Bewegung um einen festen Punkt. Unter Umdrehung versteht man eine Drehung um einen flachen Winkel.

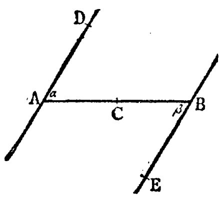


Fig. 6.

3. Fig. 6. Macht die Strecke AB um ihren Mittelpunkt C eine Umdrehung, so fällt A auf B und B auf A. Bilden ferner AD und BE mit AB gleiche Winkel, $\sphericalangle \alpha = \beta$, in der Lage, wie die Figur zeigt, so deckt nach der Umdrehung AD die Linie BE und BE die Linie AD; und wenn $AD = BE$ ist, so gelangen D und E ebenfalls zur gegenseitigen Deckung.

4. Eine Figur, die nach einer Umdrehung um einen festen Punkt ihre frühere Lage deckt, heißt zentrisch symmetrisch für den Punkt als Mittelpunkt. Zwei

Stücke, welche dabei ihre Lage vertauschen, heißen entsprechend, homolog.

5. Entsprechende Stücke sind einander gleich.

6. Der Kreis ist eine zentrisch symmetrische Figur.

§ 14. Winkelpaare an drei Geraden.

Werden — Fig. 7 — zwei gerade Linien AB und CD von einer dritten EF geschnitten, so entstehen 8 Winkel: 4 äußere α, β, η, ϑ und 4 innere γ, δ, ε, ζ. Dieselben werden z. T. paarweise mit Namen belegt.

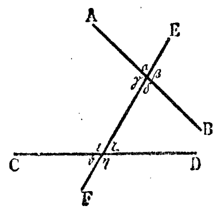


Fig. 7.

a) Gegenwinkel: ein äußerer und ein innerer auf derselben Seite der Schneidenden, z. B. α und ε, γ und ϑ.

b) Konjugierte Winkel: zwei äußere oder zwei innere auf derselben Seite der Schneidenden, z. B. α und ϑ, γ und ε.

c) Wechselwinkel: zwei äußere oder zwei innere auf verschiedenen Seiten der Schneidenden, z. B. α und η, δ und ε.

§ 15. Parallele Geraden.

1. Zwei Linien, die sich in ihrer ganzen Erstreckung nicht schneiden, heißen parallel ($\|$).

2. Grundsatz. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden läßt sich zu dieser nur eine Parallele ziehen.

3. Aus diesem Grundsatz ergibt sich durch ein indirektes Beweisverfahren: a) Zwei Geraden, die einer dritten parallel sind, liegen auch unter sich parallel.

b) Schneidet eine Gerade die eine von zwei Parallelen, so trifft sie auch die andere.

§ 16. Hauptsätze von den Parallelen.

1. Werden — Fig. 8 — die beiden Linien DF und GE von HJ so geschnitten, daß die Wechselwinkel α und β gleich sind, so ist die ganze Figur für C, den Mittelpunkt der AB, zentrisch symmetrisch. Würden sich nun die Linien FD und EG in einem Punkte schneiden, so müßte ein zweiter Schnittpunkt auch auf der anderen Seite vorhanden sein, denn die Figur deckt nach einer Umdrehung ihre ursprüngliche Lage, und die Gerade HJ trennt die Ebene vollständig in zwei Teile. Die beiden Geraden hätten demnach 2 Schnittpunkte gemeinsam, was nicht möglich ist. Mithin sind gemeinschaftliche Punkte überhaupt ausgeschlossen und die Geraden gehen parallel. Der soeben gewonnene Satz lautet:

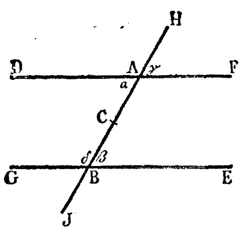


Fig. 8.

Werden zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten, so gehen die beiden Linien parallel.

2. Ist die nebenstehende Figur in der Weise entworfen, daß zwei Gegenwinkel, etwa β und γ gleich groß sind, so ist auch $\sphericalangle \alpha = \beta$; denn $\sphericalangle \alpha = \gamma$ als Scheitelwinkel und $\sphericalangle \beta = \gamma$ nach der Voraussetzung. Wenn aber $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist, so geht nach Nr. 1 dieses Paragraphen $DF \parallel GE$, d. h.:

Werden zwei Geraden von einer dritten unter

gleichen Gegenwinkeln geschnitten, so gehen die beiden Linien parallel.

3. Ferner sei vorausgesetzt, daß konjugierte Winkel zur Summe $2R$ haben. Z. B. in obiger Figur sei $\sphericalangle\,\alpha + \delta = 2R$. Dazu kommt $\sphericalangle\,\delta + \beta = 2R$ als Nebenwinkel. Mithin ist $\sphericalangle\,\alpha = \beta$. Demnach:

Werden zwei Geraden von einer dritten unter supplementären konjugierten Winkeln geschnitten, so gehen die beiden Linien parallel.

§ 17. Kehrsätze von den Parallelen.

Bei der folgenden Betrachtung seien zwei parallele gerade Linien angenommen, die von einer Geraden geschnitten werden. Es läßt sich dann zeigen, daß die Umkehrungen der drei Sätze des vorigen Paragraphen richtig sind.

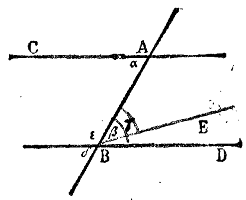


Fig. 9.

1. Fig. 9. Gesetzt, die Wechselwinkel α und β seien nicht gleich. Alsdann läßt sich durch B die Gerade BE so legen, daß $\sphericalangle\,\gamma = \alpha$ wird. Nach § 16, 1 muß nun $BE \parallel CA$ sein. Nach der Voraussetzung ist jedoch auch $BD \parallel CA$. Man hätte daher zwei Parallelen durch B zu CA, was nicht möglich ist. Der erhaltene Widerspruch kann nur durch die Annahme, daß $\sphericalangle\,\alpha = \beta$ ist, gelöst werden. Analog läßt sich zeigen, daß auch jedes andere Paar von Wechselwinkeln gleich sein muß; also ist folgender Satz richtig:

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei Wechselwinkel einander gleich.

2. Es müssen aber auch die Gegenwinkel gleich groß sein. Da nämlich nach dem vorigen Beweis $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist, und weil $\sphericalangle \delta = \beta$ ist als Scheitelwinkel, so folgt $\sphericalangle \alpha = \delta$. In Worten:

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei Gegenwinkel einander gleich.

3. Schließlich müssen je zwei konjugierte Winkel zur Summe $2R$ haben. Denn es ist $\sphericalangle \varepsilon + \beta = 2R$ als Nebenwinkel, ferner ist nach Nr. 1 dieses Paragraphen $\sphericalangle \alpha = \beta$; folglich $\sphericalangle \varepsilon + \alpha = 2R$. Hieraus ergibt sich der dritte Kehrsatz:

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei konjugierte Winkel supplementär.

§ 18. Der unendlich ferne Punkt.

1. In § 15, 1 wurden parallele Geraden als solche definiert, die sich nicht schneiden. Dieser Ausdruck läßt sich durch einen anderen ersetzen. In Fig. 10 werde durch den Punkt A die Gerade AF gelegt, welche die gegebene L in B schneidet. Dreht man nun AF in bestimmtem Sinne um A, so rückt B auf L fort, immer in weitere Ferne. Der Punkt B verschwindet, sowie $AF \parallel L$ wird, d. h. wenn AF mit der durch A zu L gezogenen Parallele AE zusammenfällt. Da es ferner nach dem Parallelaxiom durch A zu L nur eine Parallele gibt, so muß, bei fortgesetzter Drehung der AF über die Parallellage hinaus, sofort wieder ein Schneiden

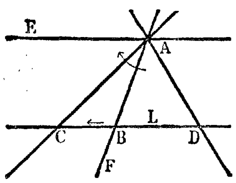


Fig. 10.

mit L stattfinden; und nach einer vollen Drehung der AF ist B zu seinem Ausgangsort zurückgekehrt. Die Gerade AF schneidet die L sonach immer, nur dann nicht, wenn sie ihr parallel ist.

Für manche Untersuchungen und Darstellungen ist es vorteilhaft, das Parallelgehen zweier Geraden nicht als Ausnahmefall aufzuführen, sondern als besonderen Fall des Schneidens zu behandeln, indem man sich so ausdrückt: Zwei parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen. Da zwei Geraden sich immer nur in einem Punkte treffen, so nimmt man auch für den Grenzfall der Parallellage konsequenterweise an, daß zwei Parallelen nur einen unendlich fernen Punkt haben.

2. Euklid gab in seinen Elementen dem Parallelaxiom folgenden Wortlaut: „Zwei gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die Summe zweier innerer konjugierter Winkel kleiner als $2R$ ist, treffen hinreichend verlängert auf eben der Seite zusammen.“ Dies ist das berühmt gewordene 11. Axiom unter den von ihm aufgezählten Grundsätzen. Neuere Untersuchungen, insbesondere die von Fr. Klein, haben endgültig dargetan, daß der obige Satz nicht bewiesen werden kann. — Der Ausdruck „unendlich ferner Punkt“ wurde zuerst von Desargues 1630 und später 1687 von Newton gebraucht. Steiner sagt: „Parallele Geraden sind nach dem unendlich fernen Punkte gerichtet.“

§ 19. Zusätze und Aufgaben.

1. Zusätze. a) Alle Lote auf einer Geraden sind parallel. b) Das Lot auf einer von zwei Parallelen ist auch auf der anderen senkrecht. c) Von einem Punkt läßt sich auf eine Gerade nur ein Lot fällen.

2. Aufgabe. Fig. 11. Durch den gegebenen Punkt A zu der gegebenen Geraden EC die Parallele zu ziehen.

Auflösung. Ziehe durch A eine die EC in B schneidende Gerade und mache $\sphericalangle DAB = ABC$, so ist $DA \parallel EC$.

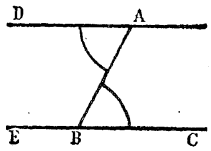


Fig. 11.

Suche eine andere Auflösung!

Bemerkung: Zur mechanischen Konstruktion paralleler Geraden dienen das Lineal und der „Winkel". Auf welchem Satze beruht dieses Verfahren?

3. Fragen. Wie erhält man die Umkehrung (Konverse) eines Lehrsatzes? Wie wird beim indirekten Beweise verfahren?

§ 20. Die Winkel im Dreieck.

1. Es soll untersucht werden, wie groß die Summe der Winkel eines Dreiecks ist. Um diesen Zweck zu erreichen, legt man — Figur 12 — durch die Spitze A zu BC die Parallele AF. Hierauf findet sich $\sphericalangle \beta + \alpha + \delta = 2\,R$ nach § 17, 3; aber $\sphericalangle \delta = \gamma$ als Wechselwinkel an Parallelen. Daher ist $\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma = 2\,R$; d. h.:

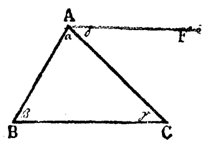


Fig. 12.

In jedem Dreieck ist die Summe der Winkel gleich $2\,R$.

2. Folgerungen. a) Die Summe zweier Dreieckswinkel ist kleiner als $2\,R$. b) Von den Winkeln eines Dreiecks sind einer stumpf und die beiden anderen spitz; oder einer ein rechter und die beiden anderen spitz; oder alle drei spitz.

3. Drehe die Gerade AC um A, verfolge dabei die Größe der Winkel α, δ, γ und ermittle die Bedeutung der Hilfslinie AF.

§ 21. Außenwinkel eines Dreiecks.

1. Ein Außenwinkel eines Dreiecks steht in einfacher Beziehung zu gewissen Dreieckswinkeln. Man hat nämlich — Figur 13 — $\sphericalangle \gamma + \delta = 2R$, sodann nach dem Satz des vorigen Paragraphen $\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma = 2R$. Daher $\sphericalangle \delta = \alpha + \beta$. In Worten:

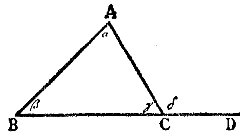


Fig. 13.

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden von ihm getrennt liegenden Dreieckswinkel.

2. Zusatz. Ein Außenwinkel ist größer als jeder der beiden von ihm getrennt liegenden Dreieckswinkel.

§ 22. Einteilung der Dreiecke.

Die Dreiecke werden eingeteilt:

1. Hinsichtlich der Winkel in rechtwinklige und schiefwinklige, und letztere wieder in stumpf- und spitzwinklige. Im rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, Katheten (*κάθετος* herabgelassen), und die Seite, welche ihm gegenüberliegt, Hypotenuse (von *ὑποτείνω* darunterziehen, hinaufspannen).

2. Hinsichtlich der Seiten in gleichseitige mit drei gleichen Seiten, gleichschenklige mit zwei gleichen Seiten und ungleichseitige, worin alle drei Seiten unter sich ungleich sind. Die beiden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks werden Schenkel,

die dritte Seite **Grundseite**, **Basis** ($\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ Grund) genannt. Zwei seiner Winkel liegen an der Basis, der dritte an der **Spitze**.

Zusatz. Ein rechtwinkliges Dreieck kann auch gleichschenklig sein.

§ 23. Die Winkel eines Vielecks.

Zieht man in einem Viereck eine Diagonale, welche das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, so ergibt sich, daß die Winkel des Vierecks $4\,R$ zusammen betragen. Um zu erfahren, welche Summe die Winkel eines n-Ecks liefern, zieht man von einer Ecke aus die sämtlichen Diagonalen. Durch dieselben wird das Vieleck in $(n - 2)$ Dreiecke zerlegt. Die Summe der Winkel dieser Dreiecke stimmt mit derjenigen des Polygones überein. Daher:

Die Summe der Winkel eines jeden n-Ecks beträgt $2 \cdot (n - 2)\,R = (2\,n - 4)\,R$.

§ 24. Übungen.

1. Werden zwei parallele Linien von einer Geraden geschnitten, so entstehen 8 Winkel; einer derselben ist $56^{\circ}\,17'\,18''$. Wie groß sind die anderen und warum?

2. Wie groß sind die Winkel eines Dreiecks, wenn sie sich wie $1:2:3$ verhalten?

3. Gehen die Schenkel zweier Winkel paarweise gleichgerichtet parallel, so sind die Winkel gleich. Ist jedoch ein Paar entgegengesetzt parallel, so sind die Winkel supplementär.

4. Zwei Punkte A und B sind zentrisch symmetrisch für den Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke.

5. Zwei parallele Geraden sind zentrisch symmetrisch für den Mittelpunkt einer zwischen sie gelegten und von ihnen begrenzten Strecke.

6. Sind A und B zentrisch symmetrisch in bezug auf C, so ist C die Mitte von AB.

7. Sind zwei Geraden zentrisch symmetrisch für einen Punkt, so sind die Geraden parallel, und der Punkt ist die Mitte jeder durch ihn und zwischen sie gelegten und von ihnen begrenzten Strecke.

8. Liegen A und B, ebenso C und D zentrisch symmetrisch, so sind AC und BD gleich groß.

9. Sind die Geraden L und L', ebenso G und G' zentrisch symmetrisch, so entspricht der Schnittpunkt (L, G) dem von (L', G'), und es ist $\sphericalangle (L, G) = (L', G')$.

10. Sind in Fig. 6 die Punkte A und B zentrisch symmetrisch, ist ferner $\sphericalangle \alpha = \beta$ und $AD = BE$, so liegen auch D und E zentrisch symmetrisch.

11. Mit Hilfe des vorigen Satzes eine gegebene Strecke zu halbieren.

12. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene Strecke halbiert.

13. In jedem Dreieck ist $\sphericalangle \alpha = 2\,R - (\beta + \gamma)$.

14. Sind in einem rechtwinkligen Dreieck β und γ die spitzen Winkel, so ist $\sphericalangle \beta + \gamma = 1\,R$ oder $\sphericalangle \beta = 1\,R - \gamma$.

15. Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so sind auch die dritten Winkel einander gleich.

16. Die drei Außenwinkel eines Dreiecks geben $4\,R$ zur Summe.

17. Wie groß ist die Summe der Außenwinkel eines n-Ecks?

18. Bei welchem Vieleck ist die Summe der Innenwinkel dreimal so groß als die der Außenwinkel?

19. Stehen die Schenkel eines Winkels senkrecht auf denen eines zweiten, so sind die Winkel einander gleich oder supplementär.

20. Das Lot von der Spitze auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks teilt dieses in zwei Dreiecke. Es ist zu zeigen, daß die drei Dreiecke einzeln verglichen gleiche Winkel haben.

21. Suche den Zusammenhang zwischen den Sätzen der Paragraphen 17 und 20 auf.

22. Zeichne in einem Zug einen unregelmäßigen fünfseitigen Stern (Drudenfuß, § 76, Nr. 15) und berechne die Summe der Winkel an den Spitzen.

23. Ein Sonnenstrahl fällt unter dem $\sphericalangle \alpha$ auf einen Wassertropfen auf und wird unter dem $\sphericalangle \beta$ gebrochen. Nach ein- bzw. zweimaliger Reflexion an der Innenfläche tritt der Strahl aus. Wie groß ist die Ablenkung in jedem der beiden Fälle?

---

5. Kapitel.

Axiale Symmetrie.

§ 25. Einführung.

1. Die Bewegung einer ebenen Figur um eine Achse, die in ihrer Ebene liegt, um einen flachen Winkel (im Raume) heißt Umwendung, Umklappung.

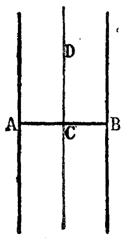


Fig. 14.

2. Wenn man — Fig. 14 — die Strecke AB um das in ihrer Mitte auf ihr errichtete Lot (Mittellot, Mittelsenkrechte) umwendet, so fällt jeder der beiden Endpunkte in die Anfangslage des anderen. Legt man durch A und B parallele Geraden zu dem Mittellot CD, so werden auch diese nach der Umklappung ihre Lagen vertauscht haben.

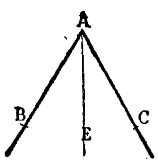


Fig. 15.

3. Macht der Winkel BAC — Fig. 15 — um seine Halbierungslinie AE eine Umklappung, so deckt jeder Schenkel die ursprüngliche Lage des anderen; wenn ferner die Strecken AB und AC gleich sind, so vertauschen auch B und C ihre Lagen.

4. Eine Figur (im weiteren Sinne des Wortes), welche nach einer Umwendung ihre An-

fangslage deckt, heißt **symmetrisch in bezug auf die Drehachse**. Zwei Stücke, die bei der Umklappung ihre Lagen vertauschen, heißen **homolog, entsprechend**.

5. Homologe Stücke sind einander gleich.

6a. Zwei Punkte sind axial symmetrisch in bezug auf das Mittellot der sie verbindenden Strecke.

6b. Wenn zwei Punkte bezüglich einer Achse symmetrisch liegen, so ist die Achse das Mittellot der sie verbindenden Strecke. (Beweis!)

7a. Zwei Linien sind axial symmetrisch hinsichtlich der Halbierungslinie eines von ihnen gebildeten Winkels.

7b. Wenn zwei Linien hinsichtlich einer Achse symmetrisch sind, so ist die Achse die Mediane desjenigen von ihnen gebildeten Winkels, in dem die Achse liegt. (Beweis!)

8. Ein Kreis ist axial symmetrisch bezüglich irgend eines Durchmessers.

§ 26. Beziehungen zwischen den Gegenstücken eines Dreiecks. Folgerungen.

1. Es sei — Fig. 16 — ABC ein Dreieck, in dem $AC > AB$ ist. Denkt man sich den $\sphericalangle A$ durch AE halbiert und $\triangle ABE$ um AE umgeklappt, so fällt AB längs AC und, da $AC > AB$ ist, der Punkt B zwischen A und C nach F. Hierbei deckt $\sphericalangle ABE$ den $\sphericalangle AFE$. Da nun $\sphericalangle ABE = AFE$ und $\sphericalangle AFE > ACE$ ist als Außenwinkel des $\triangle EFC$, so ist auch $\sphericalangle ABE > ACE$. Mithin:

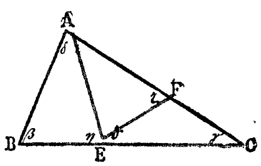


Fig. 16.

In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber.

2. Es wäre jetzt zu untersuchen, ob die Umkehrung des soeben gefundenen Satzes richtig ist. Dementsprechend ist $\sphericalangle\, \beta > \gamma$ vorausgesetzt. Wiederum sei AE die Mediane des $\sphericalangle\, BAC$. Es ist nun $\sphericalangle\, \delta = \varepsilon$ und $\sphericalangle\, \beta > \gamma$; daher $\sphericalangle\, \delta + \beta > \varepsilon + \gamma$, folglich $\sphericalangle\, \eta < \vartheta$ (Supplemente). Wird jetzt $\triangle ABE$ um AE umgeklappt, so muß BE in den Winkel AEC fallen; weil aber dabei AB längs AC zu liegen kommt, so deckt B einen Punkt zwischen A und C, oder es ist $AB < AC$. In Worten:

In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln auch die größere Seite gegenüber.

3. Zusätze. a) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse größer als jede der beiden Katheten. b) Dem stumpfen Winkel liegt im Dreieck die größte Seite gegenüber.

4. Verlängert man in dem $\triangle ABC$ die Seite BA um AC bis E und zieht EC, so ist $\sphericalangle\, AEC = \sphericalangle\, ACE$; mithin $\sphericalangle\, BCE > \sphericalangle\, BEC$. Nach dem Lehrsatz Nr. 2 in diesem Paragraphen ist daher in dem $\triangle BCE$ die Seite $BE > BC$, d. h. $AB + AC > BC$. In Worten:

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

5. Da nach Nr. 4 dieses Paragraphen $b + c > a$ ist, so ergibt sich durch Subtraktion $b > a - c$. In Worten:

In jedem Dreieck ist eine Seite größer als die Differenz der beiden anderen.

§ 27. Das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck.

Aus den Sätzen 1 und 2 des vorigen Paragraphen ergibt sich:

1. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.

2. Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so ist es gleichschenklig.

3. Zusätze. a) Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks können nur spitz sein. b) Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel einander gleich und jeder ist gleich 60°. c) Ein gleichwinkliges Dreieck ist auch gleichseitig. d) Im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ist jeder Winkel an der Basis gleich 45°. e) Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß als ein Basiswinkel. f) Umkehrung und Beweis des Satzes e).

4. Ist in Fig. 17 AD die Mediane des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ABC, so ist dasselbe, da $\sphericalangle \alpha' = \alpha''$ und $AB = AC$ ist, hinsichtlich AD symmetrisch. Hieraus folgt $BD = DC$ und $\sphericalangle \delta = \varepsilon$. Weil aber $\sphericalangle \delta + \varepsilon = 2R$ ist, so ergibt sich $\sphericalangle \delta = \varepsilon = 1R$; d. h.:

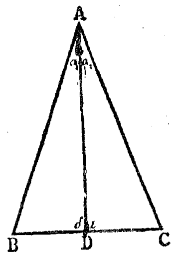


Fig. 17.

In jedem gleichschenkligen Dreieck halbiert die Mediane des Winkels an der Spitze die Grundseite und steht auf ihr senkrecht.

Somit fallen in eine Gerade zusammen: die Mediane des Winkels an der Spitze, die Höhe und die Transversale auf die Grundseite wie auch das Mittellot auf derselben. Mithin kommen einer jeden die Eigenschaften der anderen zu. (§ 32, Nr. 13.)

§ 28. Entfernung eines Punktes von einer Geraden.

In diesem Paragraphen sollen die Längen der Strecken miteinander verglichen werden, die man von einem Punkte A nach einer Geraden L legen kann.

1. Ist $AB \perp L$ — Fig. 18 — und AC irgend eine schiefe Strecke, so muß nach § 26, 3a) $AB < AC$ sein. D. h. das Lot **ist die kürzeste Strecke, die man von einem Punkt nach einer Geraden ziehen kann.**

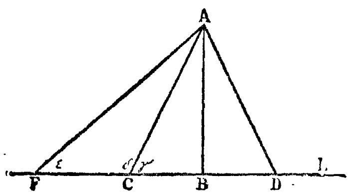


Fig. 18.

Bemerkung. Die Entfernung eines Punktes von einer Geraden wird auf dem Lot gemessen.

2. Haben ferner die Endpunkte C und D zweier schiefer Strecken von dem Fußpunkte B des Lotes gleiche Entfernungen, so ist das $\triangle\, CAD$ in bezug auf die Achse AB symmetrisch, woraus die Gleichheit der Strecken AC und AD folgt. In Worten:

Zwei schiefe Strecken sind gleich, wenn ihre Endpunkte von dem Fußpunkte des Lotes gleichweit entfernt sind.

3. Von zwei schiefen Strecken ist diejenige die größere, deren Endpunkt vom Fußpunkt des Lotes weiter entfernt ist. Beweis!

§ 29. Das Mittellot und die Winkelhalbierende als geometrische Örter.

1. Ist in Fig. 19 GH das Mittellot auf AB, so ist sowohl $EA = EB$ als auch $JA = JB$ usw., d. h.

alle Punkte des Mittellotes haben von A und B gleiche Entfernungen. Umgekehrt: Jeder von zwei Punkten gleichweit entfernte Punkt liegt auf dem Mittellot der Verbindungsstrecke beider Punkte; daher: Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen hat, ist das Mittellot auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte.

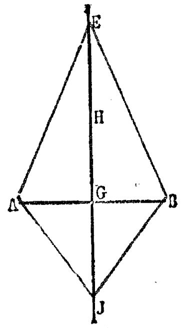


Fig. 19.

2. Fällt man — Fig. 20 — von einem beliebigen Punkte B der Winkelhalbierenden AB des $\sphericalangle DAC$ die Lote auf die Schenkel, so ergibt sich ein Viereck, das hinsichtlich der Achse AB symmetrisch ist. Folglich ist $BC = BD$, oder irgend ein Punkt der Mediane hat von den Schenkeln des Winkels gleiche Entfernungen. Die Umkehrung dieses Satzes ist auch richtig. Demnach:

Der geometrische Ort eines Punktes, der von den Schenkeln eines Winkels gleiche Entfernungen hat, ist die Mediane desselben.

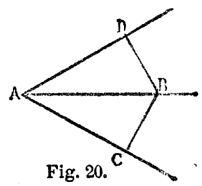


Fig. 20.

§ 30. Zwei merkwürdige Punkte des Dreiecks.

1. Die Mittellote — Fig. 21 — auf den Seiten AB und BC eines Dreiecks schneiden sich in O. Da nun $OA = OB$ und $OB = OC$ ist, so folgt auch $OA = OC$. Daher liegt nach § 29, 1 der Punkt O auf der Mittelsenkrechten der Seite AC. In Worten:

Die drei Mittellote der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der von den Ecken gleichweit entfernt ist.

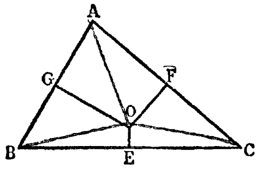


Fig. 21.

2. Das gleiche Verfahren liefert den folgenden Satz: Die drei Medianen der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der von den Seiten gleichweit entfernt ist.

§ 31. Aufgaben.

1. Auf der gegebenen Strecke AB — Fig. 22 — das Mittellot zu errichten.

Konstruktion. Beschreibe um A und B mit gleichen Radien Kreise, die sich in C und D schneiden; ziehe CD, welche Linie das verlangte Lot ist.

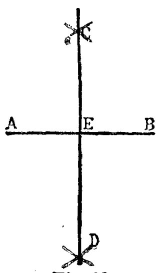


Fig. 22.

Bemerkung. Die Lösung dieser Aufgabe erledigt auch die weitere: die gegebene Strecke AB zu halbieren.

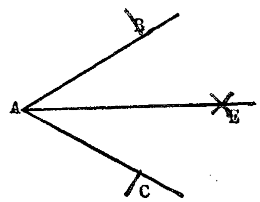


Fig. 23.

2. Den gegebenen Winkel BAC — Fig. 23 — zu halbieren.

Konstruktion. Trage auf den Schenkeln die gleichen Strecken $AB = AC$ ab. Beschreibe aus B und C mit gleichen Radien Kreisbögen, die sich in E schneiden. Die Gerade AE ist die gesuchte Mediane.

3. In einem gegebenen Punkte A — Fig. 24 — einer gegebenen Geraden L das Lot auf dieser zu errichten.

Konstruktion. Mache $AB = AC$ und schlage aus B und C mit gleichen Radien Kreisbögen, die sich in E schneiden. Die Gerade AE ist das gesuchte Lot.

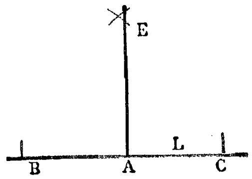


Fig. 24.

4. Von dem gegebenen Punkt A — Fig. 25 — auf die gegebene Gerade L das Lot zu fällen.

Konstruktion. Beschreibe um A einen Kreis, der L in B und C schneidet. Um B und C zeichne mit gleichen Radien Bögen, die sich in E treffen. AE ist das verlangte Lot.

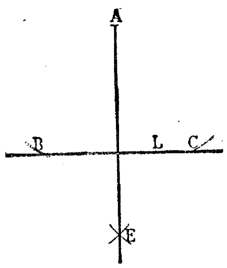


Fig. 25.

Bemerkung. In den Lösungen der Aufgaben 1—4 sind die Radien der zu zeichnenden Kreise hinreichend groß zu nehmen.

5. Den gegebenen rechten Winkel ABC (Fig. 26) in drei gleiche Teile zu teilen, zu trisezieren.

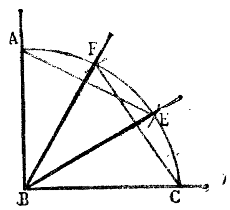


Fig. 26.

Konstruktion. Beschreibe um B einen Kreis, welcher die Schenkel in A und C schneidet. Lege in den Quadranten die Sehnen AE und CF gleich dem Radius des Kreises. Ziehe BE und BF. Diese Linien trisezieren den Winkel.

6. Beweise die Richtigkeit der Konstruktionen 1—5 und untersuche, wie viele Lösungen in jedem Fall die Aufgabe zuläßt.

§ 32. Übungen.

1. Sind die Endpunkte zweier Strecken paarweise axial symmetrisch, so sind die Strecken einander gleich.

2. Sind die Schenkel zweier Winkel paarweise axial symmetrisch, so sind die Winkel gleich.

3. Einen Winkel von 75°, von $97\frac{1}{2}{}^\circ$ zu konstruieren.

4. Einen gestreckten Winkel zu triseziercn.

5. Ist in $\triangle ABC$ die Seite $AB = AC$ und verlängert man BA bis E um AC, so ist die Verbindungslinie $EC \perp BC$.

6. Auf der Strecke AB in ihrem Endpunkte B das Lot zu errichten.

7. In einem gleichschenkligen Dreieck sei ein Basiswinkel das Doppelte des Winkels an der Spitze. Wie groß ist jeder? Was für Dreiecke entstehen durch Halbieren des Basiswinkels?

8. Ist in dem rechtwinkligen $\triangle ABC$ der spitze $\sphericalangle B$ die Hälfte des anderen spitzen $\sphericalangle C$, so ist die Hypotenuse $BC = 2 \cdot CA$. Trifft das Mittellot auf der Hypotenuse diese in D, die AB in E und die verlängerte CA in F, so ist $BE = 2EA$; ferner $EF = 2 \cdot DE$ und $AF = CA$.

9. Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei Parallelen gleiche Entfernungen hat, ist die Parallele in mittlerer Entfernung.

10. Auf der gegebenen Geraden L den Punkt zu finden, der a) von zwei Punkten, b) von den Schenkeln eines Winkels, c) von zwei parallelen Linien gleiche Entfernungen hat.

11. Den Punkt zu finden, der von drei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen hat.

12. Den Punkt zu finden, der von drei gegebenen Geraden gleiche Entfernungen hat. Wie viele solcher Punkte gibt es?

13. Man fällt von den Ecken eines Dreiecks die Lote auf die gegenüberliegenden Seiten. Die Abschnitte dieser Lote zwischen Ecke und Gegenseite heißen die Höhen des Dreiecks. Die Verbindungsstrecken der Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten werden die Transversalen, Schwerlinien des Dreiecks genannt. In jedem Dreieck ist die Summe der Höhen kleiner als die Summe der Seiten.

14. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Medianen der Basiswinkel einander gleich.

15. Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen einander gleich.

16. Liegt der Punkt D innerhalb des Dreiecks ABC und wird er mit B und C verbunden, so ist a) $DB + DC < AB + AC$ und b) $\sphericalangle BDC > BAC$.

17. In jedem Viereck ist die Summe dreier Seiten größer als die vierte. Der gleiche Satz gilt für das Fünf-, Sechseck usw. Allgemein: die gerade Linie zwischen zwei Punkten ist kürzer als jede gebrochene Linie zwischen diesen Punkten.

18. Im $\triangle ABC$ sei $b > c$; ferner $AD \perp BC$. Klappt man $\triangle ABD$ um AD in die Lage DAE um, so ist $\sphericalangle EAC = \beta - \gamma$.

19. Im $\triangle ABC$ sei $b > c$; ferner halbiere AD den $\sphericalangle BAC$. Die Umklappung des $\triangle ABD$ um AD bringt dasselbe in die Lage AED. Beweise, daß $\sphericalangle EBC = 1/_2 (\beta - \gamma)$ ist.

20. Jeder Punkt, der nicht auf dem Mittellot der Strecke AB liegt, hat von A und B ungleiche Entfernungen.

21. Jeder Punkt, der nicht auf der Mediane eines Winkels liegt, hat von den Schenkeln ungleiche Entfernungen.

22. Es seien A, B zwei Punkte auf derselben Seite der Geraden L, C ein Punkt auf L. Die Summe $AC + BC$ wird ein Kleinstes, wenn die Strecken AC und BC mit L gleiche Winkel machen. — Anwendung in der Optik.

23. Innerhalb des spitzen Winkels MAN ist der Punkt B gegeben. Man soll durch B eine den Schenkel AN in X schneidende Gerade so ziehen, daß die Halbierungslinie des $\sphericalangle BXA$ senkrecht auf AM steht.

24. Auf verschiedenen Seiten der Geraden L sind die Punkte A und B gegeben. In L den Punkt X so zu bestimmen, daß AX und BX mit L nach einerlei Seite geöffnete, gleiche Winkel bilden.

---

6. Kapitel.

Kongruenz.

§ 33. Hilfssatz.

1. Wird ein Parallelenpaar von einem anderen geschnitten — Fig. 27 —, so begrenzen die Schnittpunkte parallele Strecken, nämlich $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$. Da ferner $\sphericalangle\, \alpha = \beta$ und $\sphericalangle\, \delta = \gamma$ ist, so vertauschen nach einer Umdrehung um die Mitte O der BD die parallelen Strecken ihre Lage, woraus $AD = BC$ und $AB = DC$ folgt. D. h.:

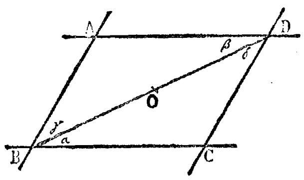


Fig. 27.

Parallele Strecken zwischen parallelen Linien sind gleich.

2. Dieser Satz läßt auch die folgende Umkehrung zu. Ist $AD \# BC$ (gleich und parallel), so ist auch $AB \# DC$. (Beweis!)

§ 34. Parallelverschiebung.

1. Wenn in Fig. 28 AC und BD parallel gehen, so bilden sie mit der Geraden L gleiche Winkel, $\sphericalangle\, \alpha = \beta$. Bewegt sich nun $\sphericalangle\, ABD$ in der Weise in der Ebene, daß der Schenkel BA stets in L bleibt, so läßt er sich mit $\sphericalangle\, \alpha$ zur Deckung bringen. Es

fällt BD längs AC; ist zugleich die Strecke $AC = BD$, so fallen auch C und D zusammen.

Ergänzt man die Figur in der Weise, daß man $\sphericalangle \gamma = \delta$ und $DE = CF$ macht, so deckt nach der Bewegung der Linienzug BDE den Zug ACF. Da nun $AC \# BD$, ebenso $CF \# DE$ ist, so folgt unter Anwendung des § 33, 2, daß $AB \# CD \# FE$ ist. Die Bewegung einer Figur von der Art, daß die Punkte der Figur in der Ebene bleiben und die Punkte einer gewissen Geraden sich auf dieser Geraden verschieben, nennt man Parallelverschiebung der Figur längs jener Geraden, und letztere heißt Leit- oder Richtlinie. Aus Obigem folgt nun:

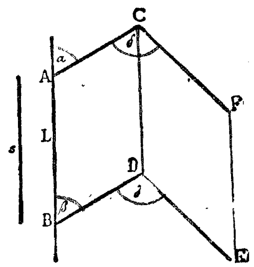


Fig. 28.

Bei einer Parallelverschiebung legen alle Punkte gleiche, unter sich und mit der Richtlinie parallele Strecken zurück.

Ferner: Bei einer Parallelverschiebung bleibt eine Strecke ihrer Anfangslage stets parallel; liegt die Strecke auf einer zur Richtlinie parallelen Geraden, so verschiebt sie sich in dieser Geraden.

2. Stücke, welche durch Parallelverschiebung zur Deckung gelangen, heißen homolog, entsprechend. Solche Stücke sind einander gleich.

3. Aufgabe. Den gegebenen Punkt D — Fig. 28 — um die Strecke s parallel zu verschieben, wenn L die Richtlinie ist.

Konstruktion. Ziehe $DC \parallel L$ und mache sie gleich s; dann ist C die gesuchte Lage des Punktes D.

4. Aufgabe. Die gegebene Strecke DE — Fig. 28 — um s zu verschieben, wenn L die Richtlinie ist.

Konstruktion. Verschiebe nach voriger Aufgabe die Punkte D und E nach C und F, so ist CF die gesuchte Lage.

§ 35. Drehung um einen beliebig großen Winkel.

1. Wird in Fig. 29 irgend ein Strahl OA um den $\sphericalangle \varphi$ in der Ebene gedreht, wodurch er in die Lage OB gebracht wird, so gelangt einer seiner Punkte A nach B, wenn $OB = OA$ ist. D. h.:

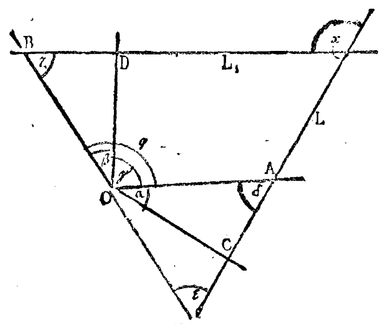


Fig. 29.

Bei der Drehung bewahrt jeder Punkt seinen Abstand vom Zentrum der Drehung.

2. Nimmt bei dieser Drehung der Strahl OA den Strahl OC mit, so ist, wenn $\sphericalangle \beta = \alpha$ gemacht wird, OD die Endlage des letzteren. Da nun $\sphericalangle \varphi = \gamma + \beta$, $\sphericalangle \beta = \alpha$ ist, so folgt auch $\sphericalangle \varphi = \gamma + \alpha = DOC$. D. h.:

Bei einer Drehung legt jeder durch den Drehpunkt gezogene Strahl den gleichen Winkel zurück.

3. Um die Endlage L_1 der Geraden L zu bestimmen, kann man zwei ihrer Punkte A und C um den $\sphericalangle \varphi$ drehen, oder nur den einen Punkt A und zugleich berücksichtigen, daß $\sphericalangle \zeta = \delta$ sein muß. Alsdann hat

man, wenn BO bis zum Schnitt mit L verlängert wird, $\sphericalangle x = \varepsilon + \zeta$, ebenso $\sphericalangle \varphi = \varepsilon + \delta$; weil aber $\sphericalangle \zeta = \delta$ ist, so ergibt sich $\sphericalangle x = \varphi$. D. h.:

Bei der Drehung einer Figur beschreibt jede Gerade den gleichen Winkel.

Bemerkung. Auf diesem Satze beruht die Verwendung des „Winkels" zur Konstruktion einer Senkrechten.

4. Fällt man von dem Drehpunkt O — Fig. 30 — auf die Gerade L das Lot OA, so kann sich bei der Drehung nach den obigen Erörterungen weder die Länge OA noch die Größe des $\sphericalangle \alpha$ ändern, woraus folgt: Der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkt der Bewegung bleibt bei der Drehung unverändert. Diese Eigenschaft bietet ein einfaches Mittel dar, eine Gerade um einen gegebenen Winkel zu drehen.

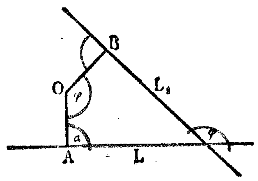


Fig. 30.

§ 36. Drehung von Strecken und Winkeln.

1. Aus den Eigenschaften des Mittellots und der Winkelhalbierenden folgt: a) Der Punkt B kann zur Deckung mit einem anderen Punkte A gebracht werden, wenn man ihn um irgend einen Punkt des Mittellots der AB dreht. b) Die Gerade L kann mit einer sie schneidenden L' zur Deckung gebracht werden, wenn sie um irgend einen Punkt der Mediane eines des von L und L' gebildeten Winkels gedreht wird.

2. Aufgabe. Die gegebene Strecke $A'B'$ — Fig. 31 — durch Drehung mit der ihr gleichen nichtparallelen AB zur Deckung zu bringen.

Konstruktion. Verlängere AB und $B'A'$ bis zu ihrem Schnitt in E. Errichte auf AA' das Mittellot und halbiere den $\sphericalangle AEB'$. Die Mediane trifft das Lot in C, dem gesuchten Drehpunkt. — Die Mediane kann man auch durch das Mittellot auf BB' ersetzen.

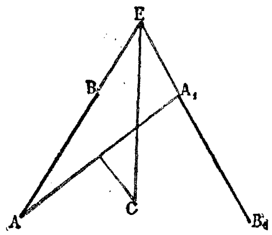


Fig. 31.

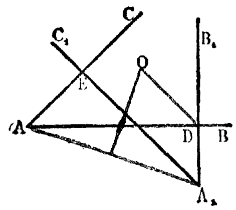


Fig. 32.

3. Aufgabe. Den gegebenen Winkel BAC — Fig. 32 — durch Drehung mit dem ihm gleichen, beliebig liegenden $B'A'C'$ zur Deckung zu bringen.

Konstruktion. Halbiere den Winkel $\sphericalangle ADB'$ und errichte auf AA' das Mittellot, welches die Mediane in O, dem gesuchten Drehpunkte, schneidet. — Das Mittellot kann auch durch die Halbierungslinie des $\sphericalangle A'EC$ ersetzt werden.

Bemerkung. Es kann notwendig werden, den einen Winkel vor der Drehung um den einen seiner Schenkel umzuklappen.

4. Durch welche Bewegung werden gleiche, parallele Strecken zur Deckung gebracht; ferner gleiche Winkel, deren Schenkel paarweise parallel gehen? (Je zwei Fälle!)

§ 37. Kongruenz der Dreiecke.

1. Zwei Figuren sind kongruent $\cong$ (congruere übereinstimmen; $=$ gleich; $\sim$ von s similis ähnlich), wenn sie zur Deckung gebracht, vollständig in eine zusammenfallen. Homolog, entsprechend heißen diejenigen Stücke, die bei der Deckung aufeinander zu liegen kommen. — Das Zeichen $\cong$ rührt von Leibniz (1646—1716) her.

2. Homologe Stücke sind einander gleich.

3. Die Deckung zweier kongruenter Figuren kann durch Umklappung, Parallelverschiebung und Drehung bewerkstelligt werden, und zwar kann eine dieser Bewegungen ausreichen, oder es müssen zwei nacheinander ausgeführt werden.

4. Zwischen den einzelnen Stücken einer Figur besteht ein derartiger Zusammenhang, daß die Größe einiger genügt, um die übrigen zu ermitteln. Die Anzahl der für eine Figur notwendigen Stücke wird durch die Lehre von der Kongruenz ermittelt. So sind, wie nachfolgende Sätze dartun, für die vollständige Bestimmung eines Dreiecks nur drei voneinander unabhängige Stücke erforderlich. Da ferner in kongruenten Figuren die entsprechenden Stücke einander gleich sind, so wird die Kongruenz der Figuren zu einem vorzüglichen Hilfsmittel, die Gleichheit von Strecken bzw. von Winkeln zu beweisen.

§ 38. Erster Kongruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Beweis. — Fig. 33. — Gegeben sind die Dreiecke ABC, $A'B'C'$, in denen $B'C' = BC$, $B'A' = BA$, $\sphericalangle B' = B$ ist. Durch die im § 37, 3 aufgeführten Bewegungen, hier durch Drehung um O mit nachfolgender Umklappung, läßt sich $B'C'$ mit BC, und zwar B' mit B, C' mit C zur Deckung bringen. Da ferner $\sphericalangle B' = B$ ist, so fällt $B'A'$ längs BA, und weil $B'A' = BA$ ist, so decken sich auch die Endpunkte A' und A. Weil nun zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist, so decken sich auch die Seiten $A'C'$ und AC. Daher ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

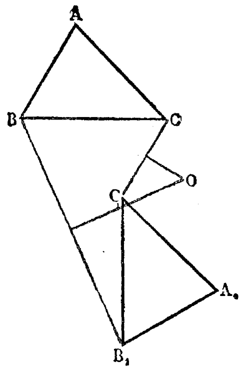


Fig. 33.

Bemerkung. Die in §§ 38—41 angeführten Bewegungen sollen mittels Pauspapiers ausgeführt werden.

§ 39. Zweiter Kongruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln von der gleichen Lage übereinstimmen.

Beweis. — Fig. 34. — Gegeben sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$, in welchen $B'C' = BC$, $\sphericalangle B' = B$, $\sphericalangle C' = C$ ist. Durch die in § 37, 3 angeführten Bewegungen, hier durch Drehung um O, kann $B'C'$ mit BC, und zwar B' mit B, C' mit C zur Deckung gebracht

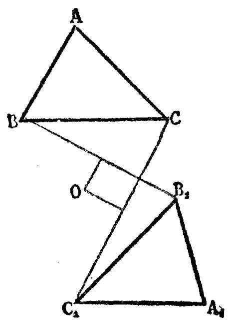


Fig. 34.

werden. Da nun $\sphericalangle B' = B$ und $\sphericalangle C' = C$ ist, so fällt $B'A'$ in die Richtung BA und $C'A'$ längs CA. Zwei Geraden schneiden sich jedoch nur in einem Punkte. Mithin deckt auch A' den Punkt A. Die Dreiecke sind kongruent.

Bemerkung. Würde vorausgesetzt, daß $\sphericalangle B' = B$, $\sphericalangle A' = A$ ist, so wäre doch auch $\sphericalangle C' = C$.

§ 40. Dritter Kongruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Beweis. — Fig. 35. — Es ist vorausgesetzt, daß in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ Seite $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A'B' = AB$ ist. Durch die in § 37, 3 angeführten Bewegungen, hier durch Parallelverschiebung längs $C'C$ und nachfolgende Umklappung, bringe man das Dreieck $A'B'C'$ in die Lage BCD, und zwar so, daß B' auf B und C' auf C fällt. Ziehe alsdann AD. Da nach der Voraussetzung $B'A' = BA$ und außerdem $B'A' = BD$ ist, so ergibt sich zunächst $BA = BD$ und daraus $\sphericalangle \delta = \zeta$. Ebenso findet man $\sphericalangle \varepsilon = \eta$. Die Addition liefert $\sphericalangle A = D$, somit ist auch $\sphericalangle A = A'$ und folglich $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

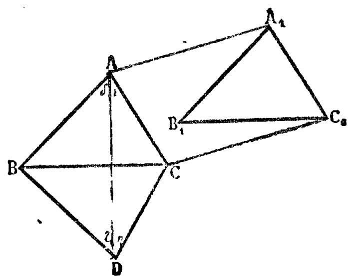


Fig. 35.

§ 41. Vierter Kongruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Beweis. — Fig. 36. — Gegeben sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$, in denen $B'C' = BC$, $B'A' = BA$, $\sphericalangle C' = C$, $AB > BC$, $A'B' > B'C'$ ist. Durch die in § 37, 3 angeführten Bewegungen, hier durch Drehung um O, bringe man $B'C'$ mit BC, und zwar B' mit B, C' mit C zur Deckung. Da ferner $\sphericalangle C' = C$ ist, so muß $C'A'$ längs CA fallen und A' auf A, wie sich durch ein indirektes Verfahren dartun läßt. Wäre nämlich $AC > A'C'$, so fällt A' auf K, wenn $CK = C'A'$ gemacht wird. Nun ist $\triangle BCK \cong B'C'A'$, woraus $BK = B'A'$ folgt. Es ist aber auch $BA = B'A'$, somit ist $BA = BK$, daher $\sphericalangle \alpha = \delta$. Auf Grund des § 21, 2 ist $\sphericalangle \delta > \gamma$, mithin auch $\sphericalangle \alpha > \gamma$, was nach § 26, 2 $BC > BA$ zur Folge hat. Dieses Ergebnis widerspricht der Voraussetzung; es kann sonach die Annahme $AC > A'C'$ nicht richtig sein. In gleicher Weise führt die Annahme $AC < A'C'$ auf einen Widerspruch. Also ist $AC = A'C'$ und damit $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

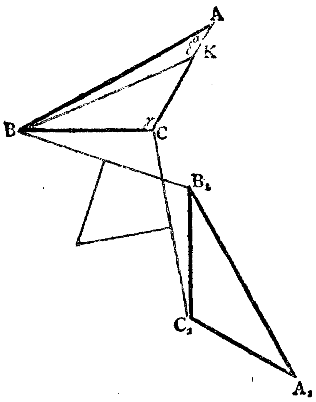


Fig. 36.

§ 42. Aufgaben über das Dreieck.

Eine Figur aus gegebenen Stücken konstruieren heißt eine Figur herstellen, die einer anderen kongruent ist, welche die gegebenen Stücke enthält. Die konstruierte Figur liefert zugleich die Größe der übrigen Stücke.

1. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu konstruieren.

2. Ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu konstruieren.

3. Ein Dreieck aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel zu konstruieren.

4. Ein Dreieck aus den drei Seiten zu konstruieren.

5. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite zu konstruieren.

6. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren Seite zu konstruieren.

Bemerkungen. Die Lösungen dieser Aufgaben sind einfach. Die Konstruktion der letzten Aufgabe liefert zwei nichtkongruente Dreiecke, die beide den gestellten Bedingungen genügen.

§ 43. Bezeichnung der Höhen, Transversalen usw. eines Dreiecks.

1. Die Höhen von den Ecken A, B, C eines Dreiecks werden der Reihe nach mit h_a, h_b, h_c bezeichnet.

2. Die Transversalen von den Ecken A, B, C eines Dreiecks bezeichnet man mit t_a, t_b, t_c.

3. Die Strecken auf den Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks zwischen den Ecken A, B, C und den Gegenseiten heißen Medianen und werden mit w_a, w_b, w_c bezeichnet.

4. Das Lot AD auf BC im Dreieck ABC teilt BC in die Abschnitte CD und BD, die mit p bzw. q bezeichnet werden.

5. Die Mediane AE nach BC teilt diese in die Abschnitte CE und BE, die mit u bzw. v bezeichnet werden.

§ 44. Übungen.

1. Einen gegebenen Kreis um die Strecke s bei gegebener Richtlinie zu verschieben.

2. Einen gegebenen Kreis um den $\sphericalangle \varphi$ zu drehen, wenn der Drehpunkt gegeben ist.

3. Zwei nichtparallele Strahlen durch Drehung zur Deckung zu bringen.

4. Bestimme den Mittelpunkt der Drehung für zwei gleich lange Strecken AB und $A'B'$, die so liegen, daß $AA' \parallel BB'$ geht.

5. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in a) den beiden Katheten, b) einer Kathete und einem spitzen Winkel von der gleichen Lage bezüglich dieser Kathete, c) der Hypotenuse und einem spitzen Winkel, d) der Hypotenuse und einer Kathete.

6. a) Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und einem anliegenden Winkel übereinstimmen, so liegt dem größeren der beiden anderen anliegenden Winkel auch die größere Seite gegenüber. b) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, so liegt dem größeren eingeschlossenen Winkel auch die größere Seite gegenüber und umgekehrt.

7. Unter welcher Länge darf in § 42, 6 die kleinere Seite nicht herabsinken, wenn die Lösung möglich sein soll?

8. Im rechtwinkligen Dreieck steht A an der Spitze des rechten Winkels. Konstruiere ein solches Dreieck aus b, c.

9. Ebenso aus a, b; 10. aus b, γ; 11. aus b, β; 12. aus a, β.

13. Im gleichschenkligen Dreieck wird die Spitze mit A bezeichnet. Konstruiere ein solches Dreieck aus a, b.

14. Ebenso aus b, β; 15. aus b, α; 16. aus a, β; 17. aus a, α.

18. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck aus a.

19. Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck aus a zu konstruieren.

20. Ebenso aus b.

21. Wie viele voneinander unabhängige Stücke bestimmen ein gewöhnliches Dreieck, ein gleichschenkliges, ein rechtwinkliges, ein gleichseitiges, ein gleichschenklig rechtwinkliges?

22. In kongruenten Dreiecken sind die homologen Höhen, Transversalen, Medianen einander gleich.

23. Ein Dreieck aus der Seite a, der zu ihr gehörigen Höhe h_a und der auf sie gezogenen Transversale t_a zu konstruieren; oder $\triangle$ aus a, h_a, t_a.

24. $\triangle$ aus c, h_a, t_a; 25. $\triangle$ aus h_a, t_a, β; 26. $\triangle$ aus c, w_a, α; 27. $\triangle$ aus b, h_a, w_a; 28. $\triangle$ aus a, α, h_b; 29. $\triangle$ aus a, c, t_c.

30. Gleichschenkliges $\triangle$ aus a, h_a. 31. Ebenso aus b, h_a. 32. Ebenso aus a, h_b. 33. Ebenso aus h_a, α.

34. Gleichseitiges Dreieck aus h_a.

35. Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck aus h_a.

36. $\triangle$ aus a, b, $b+c$; 37. $\triangle$ aus a, b, $b-c$; 38. $\triangle$ aus $a+b$, $b-c$, c; 39. $\triangle$ aus p, q, $a+c$; 40. $\triangle$ aus u, b. w_a.

41. Fällt man von einem Punkt der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks die Lote auf die Schenkel, so ist deren Summe unveränderlich.

42. Wie groß ist die Summe der Lote, die man von einem Punkt innerhalb oder außerhalb eines gleichseitigen Dreiecks auf die Seiten fällt?

43. Auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks schneidet man in gleichem Sinne gleiche Strecken ab und verbindet die Endpunkte miteinander. Was für ein Dreieck entsteht?

---

7. Kapitel.

Das Parallelogramm und das Trapez.

§ 45. Sätze über das Parallelogramm.

1. Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel gehen, heißt ein Parallelogramm.

2. Aus § 33 folgt: In jedem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich.

3. Zusätze. a) Sind in einem Parallelogramm zwei anstoßende Seiten gleich, so sind alle vier gleich groß.

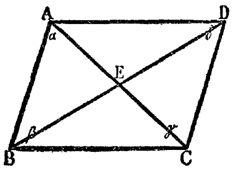


Fig. 37.

b) Alle senkrechten Strecken zwischen zwei Parallelen sind einander gleich; oder zwei Parallelen haben überall gleichen Abstand.

4. Fig. 37. Da $\sphericalangle \alpha + \beta = 2R$ ist, und ebenso $\sphericalangle \beta + \gamma = 2R$, so ergibt sich $\sphericalangle \alpha = \gamma$ und analog $\sphericalangle \beta = \delta$. D. h.:

In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

5. Zusatz. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind es alle.

6. Werden in Fig. 37 die beiden Diagonalen gezogen, so läßt sich zeigen, daß die beiden Dreiecke BCE und AED kongruent sind. Hieraus folgt $BE = DE$ und $CE = AE$. In Worten:

In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

Frage. Durch welche Bewegung bringt man die beiden Dreiecke zur Deckung?

7. Jedes Parallelogramm ist für den Schnittpunkt seiner Diagonalen zentrisch symmetrisch.

8. Zieht man — Fig. 38 — durch den Mittelpunkt E der Diagonale AC des Parallelogramms $ABCD$ die Parallele mit BC, welche AB in F, CD in G schneidet, so fällt nach einer Umdrehung um E die Strecke AF auf CG. Demnach ist $AF = CG$. Es ist aber auch nach Satz 2 dieses Paragraphen $AF = DG$. Hieraus folgt $CG = GD$ und entsprechend $BF = FA$.

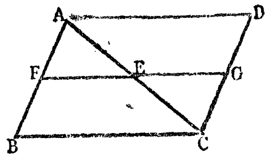


Fig. 38.

Ferner decken sich nach der Umdrehung auch die Strecken FE und EG; folglich ist $FE = EG$. Weiter ist $FG = BC$, somit $EF = \frac{1}{2} BC$. Werden diese Ergebnisse in der Weise ausgesprochen, daß man nur das Dreieck ABC berücksichtigt, so erhält man die Sätze:

Zieht man in einem Dreieck durch die Mitte einer Seite die Parallele zu einer zweiten, so wird auch die dritte Seite halbiert. Die in das Dreieck fallende Strecke der Parallele ist die Hälfte der zweiten Seite.

9. Die Linie EF heißt die **Mittelparallele** des Dreiecks ABC.

§ 46. Kehrsätze.

Die Lehrsätze des vorigen Paragraphen lassen sich umkehren, wodurch man zu folgenden Sätzen gelangt:

1. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zweimal zwei Gegenseiten gleich sind; oder wenn einmal zwei Gegenseiten gleich und parallel sind; oder wenn zweimal zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind; oder wenn die beiden Diagonalen einander halbieren.

2. Die Verbindungsstrecke der Mitte zweier Seiten eines Dreiecks ist der dritten Seite parallel und die Hälfte dieser. Diese Strecke wird die Mittellinie des Dreiecks genannt.

Beweise diese Sätze!

3. Zusatz. Haben zwei Punkte einer Geraden von einer zweiten gleichen Abstand, so sind die Geraden parallel.

4. Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer gegebenen Geraden den unveränderlichen Abstand a hat, besteht aus zwei Parallelen zu dieser Geraden im Abstande a.

§ 47. Einteilung der Parallelogramme.

Die Parallelogramme zerfallen hinsichtlich der Seiten in gleichseitige und ungleichseitige, hinsichtlich der Winkel in rechtwinklige und schiefwinklige. Im besonderen erhält man vier Arten:

a) das Quadrat, d. i. ein gleichseitig rechtwinkliges Parallelogramm;
b) das Rechteck, d. i. ein ungleichseitig rechtwinkliges Parallelogramm;
c) den Rhombus, d. i. ein gleichseitig schiefwinkliges Parallelogramm;
d) das Rhomboid, d. i. ein ungleichseitig schiefwinkliges Parallelogramm.

§ 48. Eigenschaften der gleichseitigen Parallelogramme.

1. Es seien — Fig. 39 — AC und BD die Diagonalen des gleichseitigen Parallelogramms $ABCD$. Dieselben zerlegen die Figur in vier Dreiecke, von denen

z. B. $AEB \cong AED$ ist (3. Kongruenzsatz). Hieraus ergibt sich $\sphericalangle \eta = \vartheta$; ihre Summe ist jedoch $2R$, daher $\sphericalangle \eta = \vartheta = 1R$, d. h. $AC \perp BD$. Sodann ist $\sphericalangle \delta = \zeta$ (Basiswinkel) und $\sphericalangle \varepsilon = \zeta$ (Wechselwinkel); folglich $\sphericalangle \delta = \varepsilon$. In Worten: In jedem gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel.

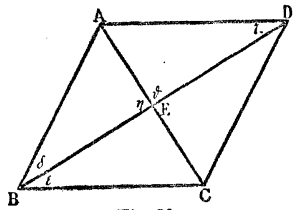


Fig. 39.

Bemerkung. Durch welche Bewegung wird $\triangle AEB$ zur Deckung mit AED gebracht?

2. Jedes gleichseitige Parallelogramm ist für jede der beiden Diagonalen axial symmetrisch.

§ 49. Eigenschaften der rechtwinkligen Parallelogramme.

1. Ist $ABCD$ — Fig. 40 — ein rechtwinkliges Parallelogramm, so läßt sich die Kongruenz der beiden Dreiecke ABC, DCB dartun (1. Kongruenzsatz), folglich ist $AC = BD$. D. h.: In jedem rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen gleich lang.

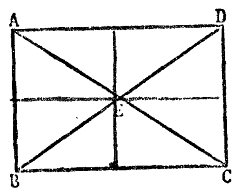


Fig. 40.

Bemerkung. Zieht man durch E die Parallele zu AB, so kann man die oben angeführten Dreiecke durch Umwenden um diese Gerade zur Deckung bringen.

2. Jedes rechtwinklige Parallelogramm hat zwei

Symmetrieachsen, nämlich die durch den Schnittpunkt der Diagonalen zu den Seiten gezogenen Parallelen.

3. Im Quadrat sind die Diagonalen gleich lang, sie stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel.

§ 50. Konstruktion der Parallelogramme.

Die einfacheren, hierher gehörigen Aufgaben werden in der Weise gelöst, daß man zunächst eines der Dreiecke konstruiert, in welche das Parallelogramm durch die Diagonalen zerlegt wird. Z. B. — Fig. 37 — $\triangle ABC$ oder $\triangle BCE$. Im ersteren Falle zieht man hierauf $CD \parallel BA$ und $AD \parallel BC$; im anderen Falle verlängert man BE um sich selbst bis D und ebenso CE bis A. Das Grunddreieck ABC ist beim Rhomboid ungleichseitig, beim Rechteck rechtwinklig, beim Rhombus gleichschenklig, beim Quadrat gleichschenklig rechtwinklig. Demnach erfordert die Konstruktion des Rhomboids 3, des Rechtecks 2, des Rhombus 2 voneinander unabhängige Stücke, während das Quadrat zu seiner Herstellung eine Strecke verlangt.

§ 51. Sätze über das Trapez.

1. Ein Viereck heißt Trapez, wenn ein Paar Gegenseiten parallel ist. Diese Strecken werden Grundseiten, ihr Abstand Höhe und die anderen Gegenseiten Nebenseiten, Schenkel genannt. Im allgemeinen sind letztere ungleich, im besonderen können sie gleich sein, ohne parallel zu liegen: gleichschenkliges Trapez.

2. In dem Trapez $ABCD$ — Fig. 41 — sei E die Mitte der AB, ferner $EF \parallel BC$ gezogen. Es sollen die Eigenschaften dieser wichtigen Linie, der Mittelparallele, aufgefunden werden. Zur Erreichung des

genannten Zwecks zerlege man durch $DH \parallel AB$ die Figur in das Parallelogramm $ABHD$ und das $\triangle DHC$. Weil $AE = EB$ ist, so erhält man auch $DG = GH$. Nach § 45, 8 ist dann $DF = FC$. In Worten:

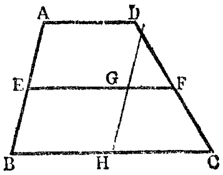


Fig. 41.

Zieht man im Trapez durch die Mitte einer Nebenseite die Parallele mit den Grundseiten, so wird auch die andere Nebenseite halbiert.

Des weiteren ist $EF = EG + GF = AD + \frac{1}{2} HC$
$$= \frac{2\,AD + HC}{2} = \frac{AD + BH + HC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$
D. h.: Die Mittelparallele eines Trapezes ist das arithmetische Mittel aus den beiden Grundseiten.

§ 52. Teilung einer Strecke.

Aufgabe. Die gegebene Strecke AB in eine Anzahl gleicher Teile, z. B. fünf, zu teilen.

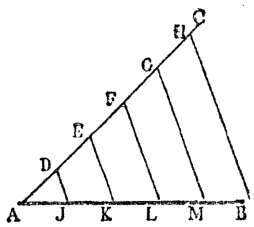


Fig. 42.

Konstruktion. — Fig. 42. — Ziehe durch A die Gerade AC, trage auf ihr fünf gleiche Strecken $AD = DE = EF = FG = GH$ ab; verbinde H mit B. Hierauf lege durch D, E, F, G Linien parallel HB, welche die AB in den verlangten Teilpunkten J, K, L, M schneiden.

Beweis. Es ist DJ die Mittelparallele des Dreiecks AEK, daher nach § 45, 8 ist $AJ = JK$. Ferner

ist EK die Mittelparallele des Trapezes $DJLF$, folglich nach § 51 $JK = KL$. Analog findet man auch $KL = LM = MB$; mithin ist $AJ = JK = KL = LM = MB$.

§ 53. Das gleichschenklige Trapez.

1. Um die Eigenschaften dieses Trapezes kennen zu lernen, wird es — Fig. 43 — durch $AE \parallel DC$ in ein Dreieck und ein Parallelogramm zerschnitten. Nun

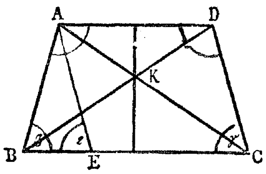


Fig. 43.

ist $AE = DC$ (Gegenseiten); aber nach Voraussetzung ist $AB = DC$, daher $AB = AE$, was $\sphericalangle \beta = \varepsilon$ zur Folge hat. Ferner ist $\sphericalangle \varepsilon = \gamma$ (Gegenwinkel), somit $\sphericalangle \beta = \gamma$ und entsprechend $\sphericalangle A = D$; d. h.: In jedem gleichschenkligen Trapez sind die Winkel an derselben Grundlinie einander gleich.

2. Eine andere Eigenschaft wird erhalten, wenn man die Diagonalen AC und BD zieht, wodurch die kongruenten Dreiecke ABC und DCB (1. Kongruenzsatz) entstehen. Diese Verwandtschaft liefert das Ergebnis $AC = BD$, wie auch $\sphericalangle ACB = DBC$, woraus $CK = BK$ und $KA = KD$ folgt. In Worten: In jedem gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen, deren untere bzw. obere Abschnitte einander gleich.

Frage. Wie bringt man $\triangle ABC$ mit DCB zur Deckung?

3. Das gleichschenklige Trapez hat das Lot, welches man aus dem Schnittpunkt der Diagonalen auf die Grundseiten fällt, zur Symmetrieachse.

§ 54. Konstruktion der Trapeze.

Um die einfacheren Aufgaben zu lösen, denke man sich das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt. Diese konstruiert man nacheinander. Gute Dienste leistet ferner die durch eine Ecke zu einer Nebenseite parallel gezogene Linie, wodurch das Trapez in ein Dreieck und ein Parallelogramm geteilt wird. Die Konstruktion des gemeinen Trapezes erfordert vier, die des gleichschenkligen drei voneinander unabhängige Stücke.

§ 55. Übungen.

Bezeichnung. Im Viereck $ABCD$ werden AB, BC, CD, DA, AC und BD mit a, b, c, d, e, f bezeichnet; $\sphericalangle A$, B, C, D mit α, β, γ, δ; einer der Winkel, unter dem sich die Diagonalen schneiden, mit ε. Im Trapez sind BC, AD die Grundseiten.

1. Ein Parallelogramm ist gleichseitig, wenn die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

2. Ein Parallelogramm ist gleichseitig, wenn ein Winkel von der betreffenden Diagonale halbiert wird.

3. Ein Parallelogramm ist rechtwinklig, wenn die Diagonalen gleich lang sind.

4. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Transversale nach der Hypotenuse die Hälfte dieser.

5. Ein Parallelogramm ist ein Quadrat, wenn die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und einander gleich sind; 6. oder wenn die Diagonalen einander gleich sind und ein Winkel von der betreffenden Diagonale halbiert wird.

7. Die Verbindungslinie der Mitten der Nebenseiten eines Trapezes ist den Grundseiten parallel.

8. Die Geraden, welche durch die Ecken A, B, C des $\triangle ABC$ parallel den Gegenseiten gelegt werden, bilden ein Dreieck, dessen Seiten in A, B, C halbiert sind.

9 Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. — Mit Hilfe von Nr. 8. — Der Höhenschnittpunkt ist der dritte merkwürdige Punkt des Dreiecks.

10. Die Mitten der Seiten und der beiden Diagonalen eines Vierecks sind die Ecken von drei Parallelogrammen, die denselben Mittelpunkt haben. Ermittle auch den Umfang eines jeden dieser Parallelogramme.

11. Die Mitten der Seiten eines Rhombus sind die Ecken eines Rechtecks.

12. Wie heißt der entsprechende Satz für das Rechteck, für das Quadrat?

13. Das Lot von der Mitte einer Dreiecksseite auf eine andere ist halb so lang als die zum Lote parallele Höhe des Dreiecks.

14. Die Verbindungsstrecken der Seitenmitten eines Dreiecks teilen dasselbe in vier kongruente Dreiecke.

15. Die Lote von den Endpunkten einer Dreiecksseite auf die zu ihr gehörige Transversale sind einander gleich.

16. Fällt man von den Ecken und dem Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms Lote auf irgend eine Gerade, so ist letzteres das arithmetische Mittel der vier ersteren.

16a. Was für eine Figur bilden die Medianen der Außenwinkel eines Rhombus, eines Rechtecks?

17. Parallelogramm aus a, b, β; 18. aus a, b, e; 19. aus e, f, ε; 20. aus b, f, ε.

21. Rhombus aus e, f; 22. aus a, α; 23. aus a, e.

24. Rechteck aus a, b; 25. aus a, f; 26. aus f, ε; 27. aus a, ε.

28. Quadrat aus a; 29. aus f; 30. aus dem Umfang.

31. Trapez aus a, b, c, β; 32. aus a, b, d, α; 33. aus b, c, e, f; 34. aus a, b, c, d.

35. Gleichschenkliges Trapez aus a, b, β; 36. aus a, b, e; 37. aus a, b, d.

38. Viereck aus a, b, c, d, e; 39. aus a, b, d, e, f; 40. aus a b, c, d, β; 41. aus a, b, d, f, β; 42. aus b, e, f, β, γ.

43. Durch den Punkt A zu L mit Hilfe eines Rhombus die Parallele zu konstruieren.

44. Zwischen die Schenkel des gegebenen $\sphericalangle A$ die Strecke $XY = s$ und $\parallel L$ zu legen.

45. Gegeben $L \parallel L'$ und der Punkt A. Durch A eine die L in X, die L' in Y schneidende Linie so zu ziehen, daß $XY = s$ werde.

46. Gegeben die Geraden L und L'. Gesucht wird der Punkt, welcher von L die Entfernung a, von L' die Entfernung b hat.

47. Gegeben die Gerade L und der Punkt P. Gesucht wird der Punkt, welcher von L und P die Entfernung a bzw. b hat.

48. Den Mittelpunkt eines Parallelogramms zu finden, dessen Ecken nicht zugänglich sind.

49. Von einem Punkte A außerhalb einer Geraden auf diese das Lot zu fällen, wenn sich die Gerade mit der Zirkelöffnung nicht erreichen läßt.

50. Einen Winkel, dessen Scheitel nicht zugänglich ist, zu halbieren.

51. Die Hälfte eines Winkels zu zeichnen, ohne ihn zu halbieren.

52. In entsprechender Weise einen Winkel zu verdoppeln.

53. Die Entfernung zweier Punkte zu finden, wenn ein Hindernis die direkte Messung nicht zuläßt.

54. Auf dem Felde die Entfernung zweier sichtbarer Punkte zu messen, wenn der eine unzugänglich ist.

55. Von einem Punkte aus drei gegebene Strecken so zu ziehen, daß ihre Endpunkte auf einer Geraden liegen.

56. Ein Dreieck zu konstruieren, dessen Seitenmitten gegeben sind.

57. Zwischen zwei Parallelen ist eine Strecke gelegt. Die Figur wird um 90° um einen Punkt der Mittelparallele gedreht. Welchen Satz gewinnt man auf diese Weise?

58. Ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

59. Welchen Satz erhält man aus Nr. 57, wenn um den $\sphericalangle \alpha$ gedreht wird?

60. Einen Rhombus zu konstruieren, von dem ein Winkel gegeben ist, und dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen sollen.

---

8. Kapitel.

Der Kreis.

§ 56. Kreis und Gerade.

Vergleicht man den Abstand einer Geraden von dem Zentrum eines Kreises mit der Länge des Halbmessers, so ergeben sich unter Beiziehung der Sätze in § 28 die Tatsachen:

a) Eine Gerade schneidet den Kreis nicht, wenn ihre Entfernung vom Zentrum größer als der Radius ist.

b) Eine Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten, wenn ihre Entfernung vom Mittelpunkt kleiner als der Halbmesser ist; die beiden Schnittpunkte liegen für den zur Geraden senkrechten Durchmesser symmetrisch.

c) Eine Gerade hat mit dem Kreise nur einen Punkt gemein, wenn ihr Abstand vom Zentrum gleich dem Radius ist. Sie heißt Tangente, der gemeinsame Punkt Berührungspunkt, der Halbmesser nach demselben Berührungsradius.

d) Wie lauten die Kehrsätze?

§ 57. Die Sehne.

1. Der Mittelpunkt C — Fig. 44 — und die beiden Endpunkte A, B der Sehne AB bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Überträgt man auf dasselbe die

in §§ 6 und 27 gefundenen Beziehungen, so ergibt sich: Der Radius, welcher einen Zentriwinkel halbiert, halbiert den dazu gehörigen Bogen, die zugehörige Sehne und steht senkrecht auf ihr.

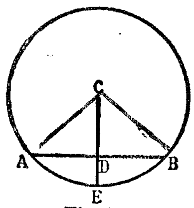


Fig. 44.

Der Radius CE ist mithin Mediane, Höhe, Transversale und Mittellot. Diese vier Linien fallen in eine zusammen und deswegen kommen jeder die Eigenschaften der übrigen zu. Insbesondere ist zu bemerken, daß das auf einer Sehne errichtete Mittellot durch das Zentrum des Kreises geht.

2. Der geometrische Ort des Mittelpunktes für alle Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, ist das Mittellot auf der Verbindungsstrecke.

3. Zusatz. Parallele Sehnen werden durch den zu ihnen senkrechten Durchmesser halbiert. Grenzlagen!

§ 58. Der Kreis durch drei Punkte.

Aufgabe. Den Kreis zu finden, der durch die drei gegebenen Punkte A, B, C geht.

Konstruktion. Verbinde die Punkte miteinander und errichte auf zwei Seiten des $\triangle ABC$ die Mittelsenkrechten. Diese treffen sich in O. Beschreibe um O mit OA den Kreis, welcher der gesuchte sein wird.

Bemerkung. Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen die Lage und die Größe eines Kreises vollständig. Dieser Kreis heißt der dem $\triangle ABC$ **umbeschriebene**; sein Radius wird mit r bezeichnet.

§ 59. Gleiche Sehnen.

1. Fällt man von dem Zentrum E — Fig. 45 — die Lote EF und EK auf die gleichen Sehnen AB und CD, zieht sodann EA, ED, so sind die $\triangle EAF$ und EKD kongruent (4. Kongruenzsatz). Daher ist $EF = EK$. D. h.:

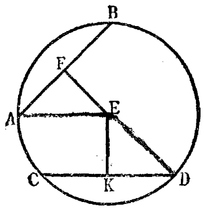


Fig. 45.

Gleiche Sehnen haben gleiche Abstände vom Mittelpunkt des Kreises.

2. Durch welche Bewegung werden die genannten Dreiecke zur Deckung gebracht?

3. Wie lautet der Kehrsatz zu Nr. 1? Beweis!

4. Mit Berücksichtigung des § 56 findet man noch: Alle gleichen Sehnen eines Kreises berühren einen konzentrischen Kreis, dessen Radius der Abstand einer dieser Sehnen vom Zentrum ist.

§ 60. Die Tangente.

1. Der Radius zu dem Berührungspunkt steht auf der Tangente senkrecht.

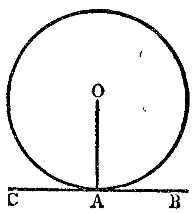


Fig. 46.

2. Aus dem Umstande, daß — Fig. 46 — die Linie OA durch das Zentrum und den Berührungspunkt geht und zur Tangente senkrecht ist, ergibt sich, daß folgende Geraden sich in eine vereinigen: a) der Radius nach dem Berührungspunkt, b) das Lot vom Zentrum auf die Tangente, c) das Lot auf der Tangente im Berührungspunkt.

3. Der geometrische Ort des Mittelpunktes

aller Kreise, welche die gegebene Gerade L in dem gegebenen Punkte A berühren, ist das Lot auf L in A.

4. Der geometrische Ort des Zentrums aller Kreise von konstantem Radius ϱ, welche die gegebene Gerade L berühren, besteht aus den beiden Parallelen zu L im Abstande ϱ.

§ 61. Konstruktion der Tangente.

1. Aufgabe. An den gegebenen Kreis O die Tangente zu legen, wenn der Berührungspunkt A gegeben ist.

Konstruktion. Fig. 46. Ziehe OA und errichte in A auf OA das Lot BC; dieses ist die verlangte Tangente.

2. Aufgabe. Von dem außerhalb des gegebenen Kreises O — Fig. 47 — liegenden Punkt A die Tangenten an denselben zu legen.

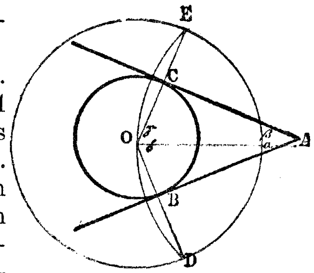


Fig. 47.

Konstruktion. Beschreibe um O einen Kreis, dessen Radius das Doppelte von dem des gegebenen Kreises ist. Sodann schlage aus A mit OA einen Kreisbogen, der den konzentrischen Kreis in D, E schneidet. Ziehe OD und OE. Diese Linien treffen den gegebenen Kreis in B, C. Verbinde A mit B und C, so hat man in diesen Geraden die verlangten Tangenten.

Beweis. Nach § 57, 1 ist $AB \perp OD$, $AC \perp OE$, alsdann muß AB und ebenso AC Tangente an dem gegebenen Kreis sein.

3. In Fig. 47 haben die Geraden AC und AB von O gleichen Abstand, mithin ist das ganze Gebilde symmetrisch für die Achse AO. Nach der Umklappung decken sich AC und AB, $\sphericalangle \beta$ und α, $\sphericalangle \gamma$ und δ gegenseitig. Daher ist $AC = AB$, $\sphericalangle \beta = \alpha$, $\sphericalangle \gamma = \delta$. D. h.: a) Die Abschnitte der von einem Punkte an einen Kreis gelegten Tangenten sind gleich lang; b) die Zentrale halbiert den Winkel zwischen beiden Tangenten und den zwischen den Berührungsradien.

4. **Der geometrische Ort des Mittelpunktes aller Kreise, die zwei gegebene Geraden berühren, besteht aus den Halbierungslinien der Winkel dieser Geraden.**

§ 62. Peripheriewinkel.

1. Der hohle Winkel, welcher von zwei sich auf der Peripherie schneidenden Sehnen gebildet wird, heißt **Peripheriewinkel**; er **steht** auf demjenigen Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

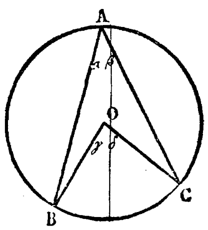


Fig. 48.

2. In Fig. 48 ist BAC ein Peripheriewinkel, BOC der zugehörige Zentriwinkel. Zieht man den Durchmesser AO, so ist $\sphericalangle \gamma = 2\alpha$ nach § 27, 3e und ebenso $\sphericalangle \delta = 2\beta$; daher $\sphericalangle \gamma + \delta = 2(\alpha + \beta)$ oder $\sphericalangle \frac{BOC}{2} = BAC$.

D. h.: **Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte seines zugehörigen Zentriwinkels.**

3. Zu allen Peripheriewinkeln, die auf dem Bogen BC stehen, gehört ein und derselbe Zentriwinkel. Daher ergibt sich:

Alle Peripheriewinkel auf demselben Bogen oder auf gleichen Bögen sind einander gleich.

4. Der Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreis steht, ist $1 R$. (Satz des Thales 640 v. Chr.)

5. Wie lauten die Kehrsätze von 3 und 4?

§ 63. Der Tangentenwinkel.

1. Die beiden hohlen Winkel zwischen einer Tangente und einer durch den Berührungspunkt gezogenen Sehne heißen Tangentenwinkel; jeder steht auf dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen. Bewegt sich — Fig. 48 — der Peripheriewinkel BAC so, daß A immer auf dem Umfang bleibt und seine Schenkel stets durch B und C gehen, so kann er seine Größe nicht verändern. Wenn hierbei schließlich A dem C unbeschränkt nahe kommt, so erhält die verlängerte Sehne AC die Lage der Tangente in C und der Peripheriewinkel ist in den bei C gelegenen Tangentenwinkel übergegangen. Sonach läßt sich vermuten, daß der Tangentenwinkel C gleich dem Peripheriwinkel A ist. Daß diese Vermutung richtig ist, zeigt folgende Erörterung.

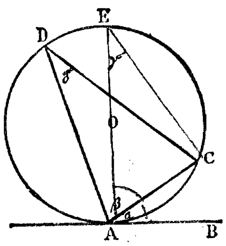


Fig. 49.

2. Es sei — Fig. 49 — CAB ein Tangenten- und ADC ein Peripheriewinkel, beide auf dem Bogen AC. Um ihre Gleichheit zu erweisen, nehme man den Peripheriewinkel zu Hilfe, dessen einer Schenkel Durchmesser ist, nämlich $\sphericalangle AEC$, so ergibt sich $\sphericalangle \gamma = \alpha$, da beide durch $\sphericalangle \beta$ zu $1 R$ ergänzt werden. Es ist aber $\sphericalangle \delta = \gamma$, mithin auch $\sphericalangle \delta = \alpha$. D. h.:

Jeder Tangentenwinkel ist so groß wie der mit ihm auf demselben Bogen stehende Peripheriewinkel.

§ 64. Geometrische Örter.

1. Der geometrische Ort für die Spitze aller rechtwinkligen Dreiecke, die auf derselben Hypotenuse stehen, ist der Kreis über der Hypotenuse als Durchmesser.

2. Der geometrische Ort für die Spitze aller Dreiecke auf derselben Strecke BC als Seite und mit gleichem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel α besteht aus zwei Kreisbögen über der Sehne BC, die je einen Winkel gleich α fassen. Beweis!

§ 65. Aufgabe.

Über der Strecke AB — Fig. 50 — als Sehne den Kreisbogen zu beschreiben, der einen Winkel gleich α faßt; oder: den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, von dem aus gesehen die Strecke AB unter dem Winkel α erscheint.

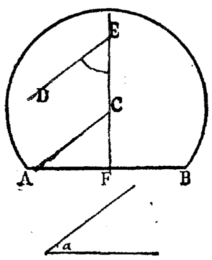


Fig. 50.

Konstruktion. Errichte auf AB das Mittellot. In dem Punkte E desselben lege $\sphericalangle DEF = \alpha$ an; ziehe $AC \parallel DE$. C ist der Mittelpunkt und CA der Radius des gesuchten Bogens.

§ 66. Das Sehnenviereck.

1. Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, wird Sehnenviereck genannt.

2. Um die Eigenschaften dieses Vierecks kennen zu lernen, ziehe man — Fig. 51 — AC, BD und beobachte, daß $\sphericalangle C + \beta + \delta = 2R$ ist. Es ist aber $\sphericalangle \alpha = \beta$, $\sphericalangle \gamma = \delta$, daher $\sphericalangle C + \alpha + \gamma = 2R$ oder $\sphericalangle C + A = 2R$. D. h.:

In jedem Sehnenviereck ist die Summe eines jeden Paares gegenüberliegender Winkel gleich $2R$.

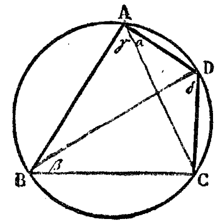


Fig. 51.

3. Wie lautet der Kehrsatz und sein Beweis?

4. Um das Rechteck, das Quadrat, das gleichschenklige Trapez läßt sich ein Kreis beschreiben; nicht aber um den Rhombus, das Rhomboid und das ungleichschenklige Trapez.

§ 67. Das Tangentenviereck.

1. Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißt Tangentenviereck.

2. Weil das Tangentenviereck ein Viereck von besonderer Art ist, so muß es außer den Eigenschaften des gemeinen Vierecks auch noch diejenigen haben, die daraus entspringen, daß seine Seiten Tangenten sind. Es ist (Fig. 52) Strecke $a = h$, $b = c$, $e = d$, $f = g$, nach § 61, 3; hieraus folgt $a + b + e + f = h + c + d + g$ oder $AB + CD = AD + CB$. In Worten:

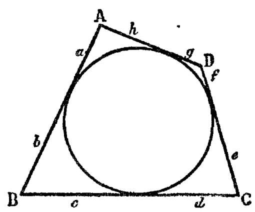


Fig. 52.

In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.

3. Wie heißt der Kehrsatz und sein Beweis?

4. Zusatz. In das Quadrat und den Rhombus läßt sich ein Kreis beschreiben; nicht aber in das Rechteck, das Rhomboid und das Trapez.

§ 68. Zwei Kreise.

1. Zwei Kreise mit gleichen Radien lassen sich dadurch zur Deckung bringen, daß man ihre Zentren zusammenfallen läßt. Daraus geht unter anderem auch hervor, daß alle Sätze, die Beziehungen zwischen Strecken oder Winkeln eines Kreises enthalten, auch für Kreise mit gleichen Radien gelten.

2. Unter Zentrale versteht man sowohl die Gerade, welche beide Mittelpunkte verbindet, als auch nur die Strecke zwischen den Zentren.

3. Die Zentrale ist Symmetrieachse für beide Kreise.

Zwei Kreise können verschiedene Lagen zueinander haben:

4a. Die beiden Kreise mit den Zentren A, B und den Radien r, r' liegen ganz außereinander. Es ist $AB > r + r'$.

4b. Umgekehrt ist $r + r' < AB$, so liegen die beiden Kreise ganz außereinander.

5a. Rückt der Mittelpunkt des einen Kreises gegen das Zentrum des anderen, so kann der Fall eintreten, daß sich die Kreise schneiden. Dies kann nur in zwei Punkten geschehen; denn haben die Kreise den Punkt C gemeinsam, so gehört auch derjenige Punkt beiden Kreisen an, der zu C hinsichtlich der Achse AB

symmetrisch liegt. Die Zentrale AB ist kleiner als $r + r'$ und zugleich größer als $r - r'$.

5b. Umgekehrt: Ist die Zentrale $AB < r + r'$ und zugleich $> r - r'$, so schneiden sich die Kreise.

6a. Zwischen den beiden soeben betrachteten Lagen gibt es eine von besonderer Wichtigkeit. Haben nämlich die beiden Kreise — Fig. 53, 54 — einen Punkt der Zentrale gemeinsam, den Punkt C, so entspricht sich dieser selbst bezüglich der Symmetrieachse AB; d. h. die beiden Kreise haben nur diesen einen Punkt gemeinsam. Errichtet man in C auf AB das Lot, so ist

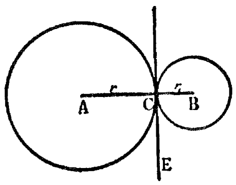


Fig. 53.

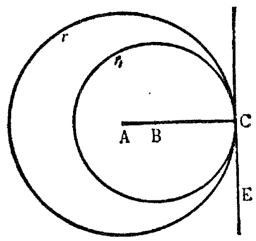


Fig. 54.

dieses gemeinschaftliche Tangente beider Kreise. Wenn aber zwei krumme Linien eine gemeinsame Tangente mit dem nämlichen Berührungspunkt haben, so sagt man, die Linien berühren sich. Daher berühren sich im vorliegenden Falle die beiden Kreise. Die Zentrale AB ist $= r \pm r'$.

6b. Umgekehrt: Der Berührungspunkt zweier sich berührender Kreise liegt auf der Zentrale. Ist die Zentrale gleich der Summe oder Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise von außen bzw. innen.

7a. Liegt der eine Kreis ganz innerhalb des anderen, so ist die Zentrale $AB < r - r'$.

7b. Umgekehrt: Ist die Zentrale $AB < r - r'$, so schließt der eine Kreis den anderen ein.

§ 69. Geometrische Örter.

1. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt aller Kreise, welche den gegebenen Kreis A in dem gegebenen Punkt B berühren, ist die Gerade AB.

2. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt aller Kreise vom gegebenen Radius ϱ, die den gegebenen Kreis von Radius r berühren, besteht aus zwei zum gegebenen Kreise konzentrischen Kreisen vom Radius $r \pm \varrho$, oder auch $\varrho \pm r$, wenn $\varrho > r$ ist.

§ 70. Gemeinschaftliche Tangenten.

1. Aufgabe. Die beiden äußeren gemeinsamen Tangenten an zwei gegebene Kreise zu legen.

Konstruktion. Beschreibe um den Mittelpunkt B — Fig. 55 — des größeren Kreises den konzentrischen, dessen Halbmesser dem Unterschiede der Radien der gegebenen Kreise gleichkommt. Lege von dem Zentrum A des anderen Kreises die Tangenten AC und AG an den konzentrischen Kreis B; ziehe BC und BG, deren Verlängerungen den Kreis B in D und H treffen. Alsdann ziehe $AE \parallel BD$ und $AF \parallel BH$. Die Ver-

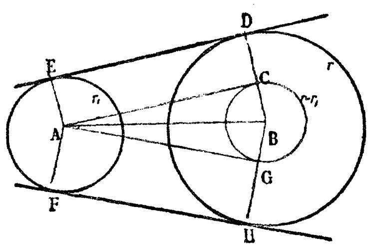


Fig. 55.

bindungslinien DE und HF sind die verlangten Tangenten.

Beweis. Aus der Konstruktion folgt $AE \# CD$, weil ferner $\sphericalangle C = 1\,R$ ist, so muß $ACDE$ ein Rechteck sein; folglich ist $\sphericalangle D = 1\,R$, $\sphericalangle E = 1\,R$, somit ED gemeinsame Tangente.

2. Aufgabe. Die beiden inneren gemeinsamen Tangenten an zwei gegebene Kreise zu legen.

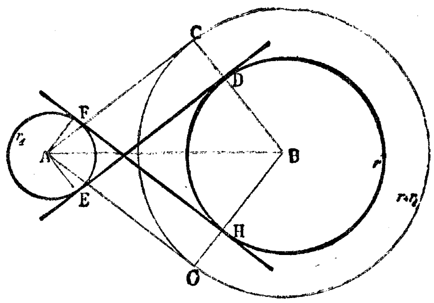


Fig. 56.

Konstruktion. — Fig. 56. — Beschreibe um das Zentrum B des größeren Kreises mit einem Radius gleich der Summe der Halbmesser der gegebenen Kreise den konzentrischen Kreis; lege von A, der Mitte des kleineren Kreises, die beiden Tangenten AC und AG an den konzentrischen Kreis B. Sodann verbinde den Punkt B mit den Berührungspunkten C und G, welche Linien den Kreis B in D und H schneiden. Ziehe AE entgegengesetzt parallel zu BC und AF entgegengesetzt parallel zu BG. Verbindet man F mit H und E mit D, so hat man die gesuchten Tangenten. — Beweis wie oben.

§ 71. Die Berührungskreise des Dreiecks.

1. Der Kreis, welcher die drei Seiten eines Dreiecks berührt, heißt der **Inkreis**. Sein Radius wird mit ϱ bezeichnet. Der Kreis, der eine Seite und die Verlängerungen der beiden anderen berührt, wird **Ankreis** genannt. Es gibt drei Ankreise, deren Radien werden mit ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c bezeichnet, je nachdem die Kreise die Seiten BC, AC, AB direkt d. h. nicht ihre Verlängerungen berühren.

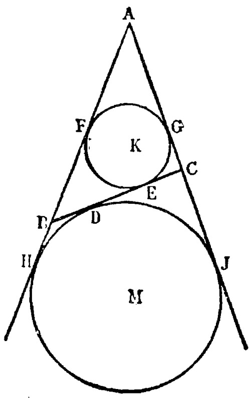


Fig. 57.

2. In Fig. 57 seien an die beiden Kreise K und M beide äußere und eine innere gemeinsame Tangente gelegt. Auf diese Weise entsteht $\triangle ABC$, in welchem der Kreis K der Inkreis und M der der Seite BC anbeschriebene ist. Nun ist nach § 61, 3 $AH = AJ$, ebenso $AF = AG$; mithin $FH = GJ$.

3. Weiter ist $BC = (BD + CD) = BH + CJ$, ebenso $BC = (BE + CE) = BF + CG$. Durch Addition erhält man $2BC = FH + GJ = 2FH = 2GJ$; daher $BC = FH = GJ$. D. h.:

Jede Dreieckseite ist so lang wie die Strecke auf jeder der beiden anderen Seiten, die zwischen den Berührungspunkten des In- und Ankreises liegt.

4. Da nun $GJ = BC$ und $CG = CE$ ist, so folgt $CJ = BE$; aber es ist $CJ = CD$, daher $BE = CD$,

und nach Wegnahme des gemeinsamen Stückes DE verbleibt $BD = CE$.

5. Bezeichnet man den Umfang eines Dreiecks, $a+b+c$, mit $2s$, so läßt sich zeigen, daß $AH = AJ = s$ ist. Denn man hat $AH = AB + HB = AB + BD$ und ebenso $AJ = AC + CD$. Mithin $2AH = 2AJ = AB + AC + BC = a + b + c$; daher $AH = AJ = s$. In Nr. 3 wurde gefunden $HF = BC$; aber $AF = AH - HF$, somit $AF = s - a$. Analog erhält man $BF = s - b$, $CG = s - c$.

§ 72. Übungen.

Bezeichnung. $\odot$ aus A, L, A auf L, K, A auf K, ϱ bedeutet: einen Kreis zu beschreiben, der durch A geht, L berührt, L in A berührt, den Kreis K berührt, den Kreis K in A berührt, den Radius ϱ hat.

1. Die Bögen zwischen zwei parallelen Sehnen sind gleich. Umkehrung!

2. Zwei zueinander senkrechte Sehnen zerlegen den Umfang in 4 Bögen; je zwei gegenüberliegende machen zusammen einen Halbkreis aus.

3. Die beiden Strecken einer Sekante, welche diese zwischen zwei konzentrische Kreise legt, sind einander gleich.

4. Die größere von zwei Sehnen hat vom Zentrum die kleinere Entfernung.

5. Wie heißt der Kehrsatz zu Nr. 4 und sein Beweis?

6. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so ist einer von ihnen gebildete Winkel gleich der Summe der zwei Peripheriewinkel, die auf den zu ihm und seinem Scheitelwinkel gehörigen Bögen stehen.

7. Wie lautet der Satz für den Fall, daß sich die Sehnen außerhalb des Kreises schneiden?

8. In einen Kreis ist das Rechteck $ABCD$ beschrieben und eine Zentrale gezogen, die AB in E und CD in F schneidet. Man bestimme auf BC den Punkt X so, daß $EX + FX$ ein Kleinstes werde. Wie lang ist $EX + FX$?

9. Über der gemeinsamen Tangente zweier sich von außen berührender Kreise als Durchmesser ist der Kreis gezeichnet. Es ist darzutun, daß dieser Kreis die Zentrale im gemeinsamen Berührungspunkte tangiert.

10. Ist in einem Dreieck $t_a = \frac{1}{2} a$, so ist es in A rechtwinklig.

11. Wenn in einem Dreieck $b > c$ ist, so ist der Winkel zwischen dem Radius des Umkreises nach A und der Mediane des $\sphericalangle A = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

12. Im rechtwinkligen Dreieck ist $\varrho = \frac{1}{2}(b + c - a)$; ferner ist $\varrho_a = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

13. Die Diagonalen zerlegen ein Viereck in vier Dreiecke. Die vier Zentren der Umkreise dieser Dreiecke sind die Ecken eines Parallelogramms.

14. In dem $\triangle ABC$ geht ein Kreisbogen durch A, C und berührt AB, ein zweiter durch A, B und berührt BC, ein dritter durch B, C und berührt AC. Es ist zu beweisen, daß sich die drei Bögen in einem Punkte schneiden.

15. Die Höhen eines Dreiecks sind die Medianen desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Fußpunkte der Höhen sind.

16. Die Medianen der Winkel eines Vierecks bilden ein Kreisviereck.

17. Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks nach außen gleichseitige Dreiecke und legt man um diese drei Dreiecke die Umkreise, so schneiden sich diese in einem Punkte. Weitere Eigenschaften dieser Figur sind anzuführen.

18. Schneidet man von einem Dreieck, dem ein Kreis einbeschrieben ist, durch Tangenten an diesen Kreis drei kleinere Dreiecke an den Ecken ab, so ist die Summe der Umfänge dieser Dreiecke gleich dem Umfang des gegebenen Dreiecks.

19. Man zeichne um das $\triangle ABC$ den Umkreis und bestimme den Mittelpunkt M des Inkreises; ferner verlängere man die Gerade AM bis zu ihrem Schnitt D mit dem Umkreis. Beweise, daß $DB = DM = DC$ ist.

20. Zieht man durch die Eckpunkte eines einem Kreise einbeschriebenen Rechtecks Tangenten, so schließen diese einen Rhombus ein.

21. Die Fußpunkte der drei Lote, die man von irgend einem Punkt der Peripherie des Umkreises eines Dreiecks auf die Seiten desselben fällt, liegen auf einer Geraden. (Benütze Kreisvierecke zum Beweis!)

22. Bestimme die Länge der Strecke DE in Fig. 57.

23. $\odot$ aus A, B, dessen Zentrum auf L liegt.

24. Durch den Punkt A innerhalb eines Kreises die kleinste Sehne zu ziehen.

25. An einen Kreis die Tangenten parallel L zu ziehen.

26. $\odot$ aus $L \parallel L'$, A.

27. $\odot$ aus A, B auf L.

28. $\odot$ aus L, A, ϱ.

29. $\odot$ aus L, L', ϱ.

30. Über AB den Kreisbogen zu zeichnen, der einen Winkel $=\alpha$ faßt. Mit Hilfe des Satzes vom Tangentenwinkel.

31. $\triangle$ aus a, h_a, α.

32. $\triangle$ aus $a+b$, r, α.

33. Rechtwinkliges $\triangle$ aus a, h_a.

34. $\triangle$ aus u, v, α.

35. $\triangle$ aus p, q, α.

36. Parallelogramm aus e, f, α.

37. $\triangle$ aus a, t_a, α.

38. Viereck aus a, b, β, $\sphericalangle fd$, $\sphericalangle fc$.

39. Viereck aus a, b, β, f, δ.

40. Viereck aus a, b, d, α, γ.

41. Kreisviereck aus b, c, d, r.

42. Ebenso aus a, b, e, c.

43. Tangentenviereck aus b, β, γ, c.

44. Ebenso aus b, β, γ, f.

45. Ebenso aus a, b, c, β.

46. In einen Sektor den Inkreis zu beschreiben.

47. Zwischen die Katheten des rechtwinkligen Drei-

ecks ABC die Strecke $XY = s$ so zu legen, daß sie von der Hypotenuse halbiert werde.

48. $\odot$ aus A auf K, ϱ.

49. $\odot$ aus K, L, ϱ.

50. $\odot$ aus K, K', ϱ.

51. $\odot$ aus K, A, ϱ.

52. $\odot$ aus A auf K, B.

52a. Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis berührt, durch einen Punkt auf einer Geraden geht und sein Zentrum auf dieser Geraden hat.

53. Eine Linie zu finden, die den gegebenen Kreis K berührt und in den gegebenen Kreis K' eine Sehne $= s$ legt.

54. $\triangle$ aus a, ϱ, α.

55. $\triangle$ aus a, ϱ, ϱ_a.

56. $\triangle$ aus α, a, ϱ_a.

57. $\triangle$ aus $2s$, α, ϱ.

58. $\triangle$ aus $2s$, α, a.

59. Um die drei Ecken eines Dreiecks Kreise zu beschreiben, von denen sich je zwei berühren.

60. Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise eine Sekante zu legen, so daß die in die Kreise fallenden Sehnen gleich werden.

61. Desgleichen, so daß die zu den Sehnen gehörigen Zentriwinkel gleich werden.

62. Desgleichen, so daß die Summe beider Sehnen gleich s werde.

63. Durch den Schnittpunkt A der beiden Kreise K und K' eine Sehne in K so zu ziehen, daß sie von der Peripherie des Kreises K' halbiert werde.

64. Gegeben sind die Punkte A, B und C. Durch A eine Gerade zu ziehen, daß die von B und C auf sie gefällten Lote eine gegebene Summe haben.

65. Desgleichen eine gegebene Differenz.

66. Man soll drei Kreise konstruieren, die sich gegenseitig in den Punkten A, B und C berühren.

67. In dem $\triangle ABC$ die Strecke $XY \parallel BC$ so zu ziehen, daß $XY + BC = BX + CY$ werde.

68. Tangententrapez aus $a + c$, β, γ.

69. Vom Punkt P aus sind an den Kreis O die Sekanten PAB und PCD gezogen. Zwischen beide Linien die Sekante PXY so zu legen, daß Bogen $AX =$ Bogen DY wird.

---

9. Kapitel.

Regelmäßige Vielecke.

§ 73. Eigenschaften.

1. In den früheren Paragraphen war unter anderem die Rede vom gleichseitigen Dreieck, vom Quadrat, d. h. von Figuren mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln. Die Erfahrung lehrt, daß es auch Fünfecke, Sechsecke usw. von gleicher Eigenschaft gibt.

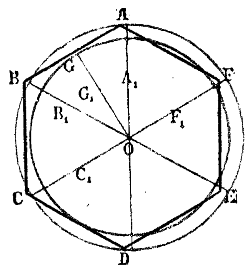


Fig. 58.

2. Ein Vieleck heißt **regelmäßig, regulär**, wenn es gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

3. Jedes reguläre Polygon ist axial symmetrisch sowohl für die Mediane eines Winkels, als auch für das Mittellot einer Seite.

4. Wird — Fig. 58 — die Mediane AA' des $\sphericalangle A$ zur Symmetrale gewählt, so sind die Winkelhalbierenden BB', FF' benachbarter Winkel homologe Geraden, sie müssen sich somit auf AA' schneiden, oder diese drei Medianen treffen sich in dem Punkte O. Aus demselben Grunde vereinigen sich CC', BB', AA' in O, wenn man BB' zur Symmetrale macht. Da

ferner auch das Mittellot GG' zur Achse der Symmetrie genommen werden kann, und sich alsdann die Medianen AA', BB' entsprechen, so wird deren Schnittpunkt auf dem Mittellot liegen, oder das Mittellot geht durch O. Das gleiche läßt sich von den Mittelsenkrechten der anderen Seiten dartun. Daher:

In jedem regelmäßigen Vieleck schneiden sich die Medianen der Winkel und die Mittelsenkrechten der Seiten in demselben Punkt.

5. Nimmt man dies Ergebnis zusammen mit den Eigenschaften des Mittellotes und der Winkelhalbierenden, so ergibt sich, daß der Schnittpunkt O sowohl von den Ecken, als auch von den Seiten des Vielecks gleichweit entfernt ist. D. h.:

Jedes reguläre Polygon läßt einen Umkreis und einen Inkreis zu; beide Kreise sind konzentrisch.

6. Die Winkelhalbierenden AO, BO usw. teilen den vollen Winkel bei O in n gleiche Teile, wenn das Vieleck n Seiten hat; daher ist jeder Zentriwinkel $= \frac{4}{n} R$.

7. Das Dreieck ABO heißt das Bestimmungsdreieck, $AO = r$ der große und $GO = \varrho$ der kleine Radius des Vielecks.

§ 74. Kehrsätze.

1. Teilt man die Peripherie eines Kreises in n gleiche Teile und verbindet je zwei Nachbarpunkte durch Sehnen, so läßt sich beweisen, daß das so entstandene Vieleck regelmäßig ist: Die Seiten sind einander gleich, weil sie zu gleichen Bögen gehören, und die Winkel sind einander gleich, da jeder ein Peripheriewinkel auf $(n - 2)$: $n$tel des Umfanges ist.

2. In analoger Weise zeigt man die Richtigkeit des folgenden Satzes: Teilt man den Umfang eines Kreises in n gleiche Teile, und legt man in den Teilpunkten an den Kreis die Tangenten, so bilden dieselben ein reguläres Vieleck.

§ 75. Konstruktion zweier Reihen regulärer Polygone.

1. Zieht man in einem Kreise zwei zueinander senkrechte Durchmesser, so sind deren Endpunkte die Ecken des regelmäßigen Vierecks. Durch Halbieren der Bögen kommt man auf das Achteck, von hier aus auf das Sechzehneck usw.

2. Da der Zentriwinkel des regulären Sechsecks gleich 60^0 ist, so folgt, daß eine Seite dieses Vielecks gleich dem Radius des Umkreises ist. Halbiert man die zu den Seiten des Sechsecks gehörigen Bögen, so tritt das regelmäßige Zwölfeck und in gleicher Weise das Vierundzwanzigeck usw. auf.

§ 76. Übungen.

1. In jedem regulären n-Eck ist ein Winkel $= \frac{2n-4}{n} R$.

2. In jedem regelmäßigen Vieleck von gerader Seitenzahl sind je zwei Gegenseiten parallel.

3. Trägt man auf den Seiten AB, BC und CA eines gleichseitigen Dreiecks die Stücke $AD = BE = CF = \frac{1}{3} AB$ ab und verbindet man die Punkte D, E und F miteinander, so ist $\triangle DEF$ gleichseitig und seine Seiten stehen auf denen des $\triangle ABC$ senkrecht.

4. Im gleichseitigen Dreieck ist $\varrho = \frac{1}{3} h$.

5. Über AB als Seite das regelmäßige Sechseck zu konstruieren.

6. Ein gleichseitiges Dreieck so abzustumpfen, daß ein regelmäßiges Sechseck übrig bleibt.

7. Ein Achteck zu konstruieren, das mit einem gegebenen Quadrat gleichen Umfang hat.

8. Einem Quadrat ein anderes von gegebener Seite einzubeschreiben.

9. In einen Rhombus ein Quadrat einzubeschreiben, dessen Seiten den Diagonalen parallel gehen.

10. In einen Kreis drei gleiche Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und den gegebenen Kreis berührt.

11. Desgleichen um einen gegebenen Kreis.

12. Durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks drei Linien zu ziehen, welche ein gleichseitiges Dreieck von der Seite s bilden.

13. Drehe ein Quadrat um seinen Mittelpunkt um 45^0 und untersuche die Figur, welche aus beiden Quadraten gebildet wird.

14. Drehe ein gleichseitiges Dreieck um $2\,R$, und untersuche die Figur, die durch die beiden Dreiecke hervorgerufen wird.

15. Die Diagonalen eines regulären Fünfecks bilden wieder ein regelmäßiges Fünfeck.

Bemerkung. Verlängert man alle Seiten eines regelmäßigen Fünfecks bis zum Schnitt, so entsteht der Drudenfuß, das Pentagramm, welches im Mittelalter als Zauber gegen Elementargeister angewendet wurde.

---

10. Kapite

Die Gleichheit der Inhalte.

a) Vergleichung der Inhalte.

§ 77. **Einführung.**

Während in den vorangegangenen Kapiteln Winkel, Strecken, Linien der Figuren betrachtet worden sind,

soll jetzt der Inhalt derselben einer Untersuchung unterworfen werden.

1. Zwei Figuren heißen **gleich**, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben.

2. Zusatz. Kongruente und symmetrische Figuren sind einander gleich.

3. Jede Seite eines Dreiecks heißt **Grundseite**. Im Parallelogramm, Trapez werden zwei parallele Gegenseiten **Grundseiten** genannt, und der Abstand beider heißt die zugehörige **Höhe**.

4. Haben zwei Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze gleiche Höhe, so lassen sie sich zwischen zwei Parallelen legen, deren Abstand jener Höhe gleichkommt, und umgekehrt: Liegen diese Figuren zwischen zwei Parallelen, so haben sie gleiche Höhe.

5. Im spitzwinkligen Dreieck liegen sämtliche Höhen innerhalb des Dreiecks, im rechtwinkligen Dreieck fallen zwei derselben mit den Katheten zusammen und im stumpfwinkligen Dreieck liegen die beiden Höhen außerhalb des Dreiecks, welche auf die den stumpfen Winkel einschließenden Seiten gefällt sind. — Im Rhombus und im Quadrat sind die beiden Höhen einander gleich. — Im gleichschenkligen Dreieck sind die Höhen auf die Schenkel und im gleichseitigen Dreieck sind alle drei Höhen einander gleich.

§ 78. Die Gleichheit der Parallelogramme und Dreiecke.

1. Bei der Vergleichung der Inhalte geradliniger Figuren geht man am besten von Parallelogrammen aus. Man wählt zunächst zur Untersuchung zwei Parallelogramme von gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe. Diese beiden Figuren lassen sich zwischen

zwei Parallelen legen, wodurch Fig. 59 erhalten wird. Da $EF = AB$ ist, so deckt das Trapez $AEHD$ nach einer Verschiebung um AB längs AF die Figur $BFGC$. Beide Trapeze sind daher gleich. Nach Wegnahme des gemeinsamen Trapezes $BEHC$ bleibt $ABCD = EFGH$. D. h.:

Zwei Parallelogramme von gleicher Grundseite und gleicher Höhe sind gleich.

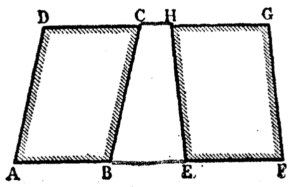


Fig. 59.

2. Jedes Parallelogramm ist für den Schnittpunkt seiner Diagonalen zentrisch symmetrisch. Daraus folgt, daß die beiden Dreiecke, in die es durch eine Diagonale zerlegt wird, gleich sind, oder jedes Dreieck ist die Hälfte des Parallelogramms. Ein solches Dreieck hat gleiche Grundseite und gleiche Höhe mit dem Parallelogramm, und weil letzteres durch irgend ein anderes von gleicher Grundseite und Höhe ersetzt werden darf, so erhält man den Satz:

Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe.

3. Folgerung. Zwei Dreiecke von gleicher Grundseite und Höhe sind einander gleich.

4. Gleiche Parallelogramme von gleicher Grundseite haben gleiche Höhe, von gleicher Höhe gleiche Grundseite. Führe den entsprechenden Lehrsatz für das Dreieck an und beweise beide Sätze!

§ 79. Geometrischer Ort.

Der geometrische Ort der Spitze aller gleichen Dreiecke auf gemeinsamer Grundseite

ist die Parallele zur Grundseite durch eine Spitze.

§ 80. Die Pythagoreischen Sätze.

1. Es seien — Fig. 60 — a, b, c die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC, h die Höhe auf die Hypotenuse, p, q die dadurch entstandenen Abschnitte auf letzterer — sie werden die Projektionen von b, c auf BC genannt (proicere herabwerfen) —; ferner werde der Inhalt eines Quadrats von der Seite s mit s^2, der Inhalt eines Rechtecks von den anstoßenden Seiten f, g mit $f \cdot g$ bezeichnet. (Daß dies statthaft ist, wird in § 106 gezeigt werden.)

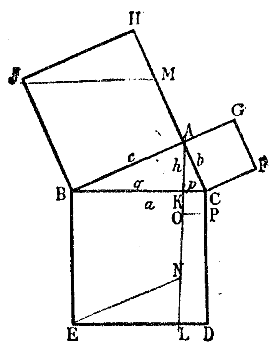


Fig. 60.

2. Die wichtigsten Inhaltsbeziehungen werden am rechtwinkligen Dreieck erhalten. Diese sind $b^2 = a \cdot p$; $c^2 = a \cdot q$; $b^2 + c^2 = a^2$; $h^2 = p \cdot q$. Die Richtigkeit derselben wird wie folgt bewiesen:

3. Errichte auf den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC die Quadrate $BCDE$, $ABJH$, $ACFG$; zerlege ferner das erstere Quadrat durch das Lot AL zu BC in die beiden Rechtecke $BKLE$, $CKLD$. Zieht man noch $EN \parallel BA$ und $JM \parallel BC$, so ist Parallelogramm $BENA = BJMC$, weil sich beide nach einer Drehung um B um 90^0 decken. Aber Parallelogramm $BENA$ = Rechteck $BKLE$ und Parallelogramm $BJMC$ = Quadrat $BJHA$. Daher ist auch Rechteck $BKLE$

$=$ Quadrat $BJHA$ oder $c^2 = a \cdot q$. Ebenso beweist man $b^2 = a \cdot p$. In Worten:

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse. (Satz des Euklides.)

Addiert man die beiden soeben erhaltenen Resultate, so kommt $a^2 = b^2 + c^2$. D. h.:

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten. (Satz des Pythagoras.)

4. Macht man nun $KO = KC$ und zieht $OP \parallel BC$, so ist $KCPO$ das Quadrat über p; auch ist $OL = q$. Nach Nr. 3 ist aber $b^2 = h^2 + p^2$ und $b^2 = a \cdot p = p^2 + p \cdot q$, weil $KCDL = KCPO + OPDL$ ist; folglich ist $h^2 = p \cdot q$. D. h.:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Hypotenuse. (Höhensatz.)

5. **Bemerkung.** Um zu beweisen, daß eine Größe gleich der Summe zweier anderer ist, zerlegt man häufig diese eine Größe in zwei Teile, die den beiden kleineren Größen einzeln verglichen gleich sind. Dieses Verfahren rechtfertigt hier die Hilfslinie AL. Die beiden anderen Hilfslinien JM und EN führen auf kongruente Figuren.

6. Ist in einem Dreieck das Quadrat der größten Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig. Beweis!

7. Der oben unter Nr. 3 bewiesene Satz wird nach Pythagoras aus Samos (im 6. Jahrh. v. Chr.) der Pythagoreische genannt. Die Tatsache, daß drei Strecken von 3, 4, 5 Längeneinheiten die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, ist schon sehr frühe gefunden worden. Sehr wahrscheinlich hatten die alten Ägypter und Babylonier Kenntnis davon.

Auch Pythagoras mußte um diesen Satz wissen. Dazu entdeckte er, daß $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist. Aus der Verbindung dieser beiden Richtigkeiten entsprang der berühmte Lehrsatz, zunächst jedoch nur für das Dreieck, dessen Seiten 3, 4, 5 Einheiten lang sind. Pythagoras hat ihn dann sicherlich auch für das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck als richtig erwiesen. Der heute noch gebräuchlichste Beweis stammt von dem alexandrinischen Mathematiker Euklides (300 v. Chr.) her. Er stützt sich auf die Kongruenz der Dreiecke JBC und ABE. Pythagoras löste auch die Aufgabe: Drei Zahlen a, b, c von der Beschaffenheit zu finden, daß $a^2 = b^2 + c^2$ werde. Er fand, wenn n eine ganze Zahl ist, für $a = 2n^2 + 2n + 1$, $b = 2n^2 + 2n$, $c = 2n + 1$. In der Tat ist $n = 1$, so ist $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$; ist $n = 2$, so kommt $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$ usw.

§ 81. Anwendung auf das schiefwinklige Dreieck.

1. Es sei — Fig. 61 — ABC ein bei C spitzwinkliges Dreieck, $AE \perp BC$. Nach § 80 ist nun c^2

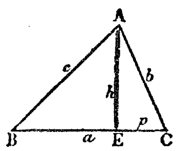


Fig. 61.

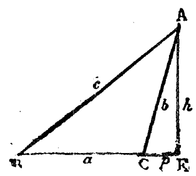


Fig. 62.

$= (a - p)^2 + h^2 = a^2 + p^2 - 2ap + h^2 = a^2 + b^2 - 2ap$, weil $h^2 + p^2 = b^2$ ist.

2. Ist dagegen — Fig. 62 — ABC ein bei C stumpfwinkliges Dreieck, und ist auch hier $AE \perp BC$, so erhält man $c^2 = (a + p)^2 + h^2 = a^2 + p^2 + 2ap + h^2 = a^2 + b^2 + 2ap$.

Beide Sätze lauten in Worten:

Das Quadrat über einer (der ersten) Dreiecksseite, die einem spitzen bzw. stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über der zweiten und dritten Seite vermindert bzw. vermehrt um das doppelte Rechteck aus der zweiten Seite und der Projektion der dritten auf die zweite.

b) Verwandlung der Figuren.

§ 82. Aufgaben.

1. Eine Figur **verwandeln** heißt sie unter Erhaltung ihres Flächeninhalts so umgestalten, daß sie noch anderen gegebenen Bedingungen genügt. Somit läßt sich jede Aufgabe über Verwandlung auch in der Fassung geben: Eine Figur zu konstruieren, von welcher neben anderen Stücken der Inhalt gegeben ist.

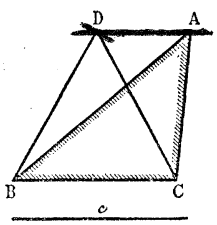


Fig. 63.

2. Das gegebene Dreieck ABC in ein anderes mit der gemeinsamen Grundseite BC zu verwandeln, von dem noch die Nebenseite c gegeben ist.

Konstruktion. — Fig. 63. — Ziehe durch A die Parallele zu BC, welche den um B mit c beschriebenen Kreisbogen in D schneidet. Verbinde D mit B und C. $\triangle BCD$ ist das verlangte.

3. Das gegebene Parallelogramm $ABCD$ in ein anderes mit der gemeinsamen Grundseite BC zu verwandeln, von dem noch $\sphericalangle \beta$ gegeben ist.

Konstruktion. — Fig. 64. — Lege an BC in B den $\sphericalangle CBM = \beta$ an. Der Schenkel BM schneidet AD

in F. Ziehe $CE \parallel BF$. $BCEF$ ist das verlangte Parallelogramm.

Verwandle ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck.

4. Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm unter Beibehaltung a) einer Seite, b) einer Höhe zu verwandeln.

a) Konstruiere über der beibehaltenen Seite ein Parallelogramm, dessen Höhe die Hälfte derjenigen Dreieckshöhe ist, die zu jener Seite gehört.

b) Konstruiere ein Parallelogramm, dessen Höhe

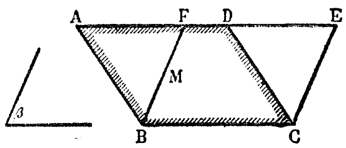


Fig. 64.

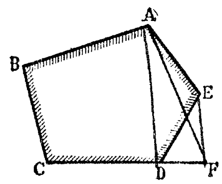


Fig. 65.

gleich der gegebenen Dreieckshöhe ist, und dessen zugehörige Grundseite die Hälfte derjenigen Dreiecksseite ist, die zu jener Höhe gehört.

Verwandle ein gegebenes Dreieck in ein Reckteck.

5. Ein Vieleck in ein anderes zu verwandeln, das eine Ecke weniger als das gegebene hat. Fig. 65.

Konstruktion. Gegeben ist das Fünfeck $ABCDE$. Wenn die Ecke D verschwinden soll, so ziehe AD und durch E die Parallele zu AD, welche die verlängerte CD in F schneidet. Verbinde A mit F. Es ist $ABCF$ das verlangte Viereck.

Beweis. Nach § 78, 3 ist $\triangle ADF = ADE$. Zählt

man zu beiden Dreiecken das Viereck $ABCD$ hinzu, so ergibt sich $ABCF = ABCDE$.

Verwandle ein gegebenes Fünfeck in ein Dreieck.

6. Das gegebene Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, so daß $\sphericalangle B$ bleibt und die eine der einschließenden Seiten, BC, die gegebene Länge s erhält.

Konstruktion. Auf dem Strahl BC trage $BE = s$ ab. Ziehe AE und durch C die Parallele zu EA, welche die Seite AB in F schneidet. Verbinde F mit E, so ist BFE das gewünschte Dreieck. Fig. 66.

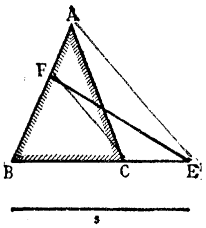


Fig. 66.

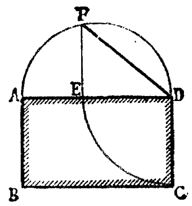


Fig. 67.

Beweis. Es ist $\triangle BCF = BCF$; ferner $\triangle FCE = FCA$ (§ 78, 3), addiert: $\triangle BFE = ABC$. Außerdem ist $BE = s$ und $\sphericalangle B$ geblieben.

Bemerkung. Beobachte, wie sich die Höhe h_a mit der Länge der BC ändert. — Verwandle das Dreieck ABC in ein anderes, so daß der $\sphericalangle B$ bleibt und die Höhe $h_a = s$ wird.

7. Das gegebene Rechteck $ABCD$ in ein Quadrat zu verwandeln.

Konstruktion. a) Mit dem Eukl. Satze. Fig. 67. Trage auf DA die Strecke $DE = DC$ ab; beschreibe über AD als Durchmesser den Halbkreis, in E errichte

auf AD das Lot, welches den Halbkreis in F schneidet; ziehe DF, so ist diese Strecke die Seite des gesuchten Quadrates.

b) Mit dem Höhensatze. Fig. 68. Verlängere AD bis E um DC, konstruiere über AE als Durchmesser den Halbkreis; dieser wird von der verlängerten CD in F geschnitten. Es ist DF die Seite des gesuchten Quadrates.

8. Ein Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

Konstruktion. Verwandle das Polygon mit Hilfe von Nr. 5 in ein Dreieck, dieses mittels Nr. 4 in ein Rechteck und letzteres nach Nr. 7 in das gesuchte Quadrat.

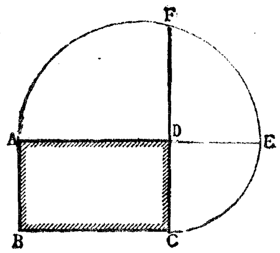


Fig. 68.

9. Ein Quadrat zu konstruieren, das gleich der Summe oder der Differenz zweier gegebener Quadrate a^2, b^2 ist.

Konstruktion. Im ersten Falle stelle man ein rechtwinkliges Dreieck her, dessen Katheten gleich a, b sind. Die Hypotenuse ist die Seite des gewünschten Quadrats. Im anderen Falle wird die größere gegebene Quadratseite zur Hypotenuse, die kleinere zu einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks gewählt. Die andere Kathete ist die Seite des gesuchten Quadrats.

10. Ein Quadrat zu konstruieren, das doppelt, viermal so groß ist als ein gegebenes Quadrat.

c) *Teilung der Figuren.*

§ 83. **Aufgaben.**

1. Ein gegebenes Dreieck von einer Ecke aus in n gleiche Teile zu teilen.

Konstruktion. Teile die Gegenseite der gegebenen Ecke in n gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit der Ecke.

2. Ein gegebenes Trapez in n gleiche Teile zu zerlegen.

Konstruktion. Teile die Mittellinie in n gleiche Teile; ziehe durch die Teilpunkte Linien, welche die Grundseiten schneiden, einander aber innerhalb der Figur nicht treffen.

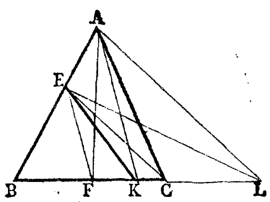


Fig. 69.

Beweis. Jedes der erhaltenen Trapeze ist gleich einem Parallelogramm, dessen Höhe gleich der Höhe des Trapezes, und dessen Grundseite gleich $1/n$-tel der Mittellinie ist.

3. Das gegebene $\triangle ABC$ von dem auf der Seite AB gelegenen Punkte E aus zu halbieren. (Fig. 69.)

Konstruktion a). Halbiere BC in F; verwandle $\triangle ABF$ in das $\triangle BEK$, so daß die Seite BA durch BE ersetzt wird; dann ist EK die gesuchte Teilungslinie.

Konstruktion b). Verwandle $\triangle ABC$ in das $\triangle BEL$, so daß E die Spitze wird. Ziehe nämlich EC, sodann durch A die Parallele zu EC, welche die verlängerte BC in L trifft, verbinde E mit L. Halbiere BL in K. Die Linie EK halbiert das gegebene Dreieck.

Bemerkung. Solche Teilungsaufgaben lassen sich im allgemeinen in doppelter Weise lösen: entweder durch vorhergehende Teilung und nachfolgende Verwandlung, oder umgekehrt.

4. Ein Quadrat zu zeichnen, das die Hälfte eines gegebenen Quadrats ist.

§ 84. Übungen.

1. Jede durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms gehende Gerade halbiert dasselbe.

2. Zieht man durch die Mitte der Nebenseite eines Trapezes die Parallele mit der andern Nebenseite, so entsteht ein Parallelogramm, das gleich dem Trapez ist.

3. Die Mittellinie eines Dreiecks schneidet von diesem ein Dreieck ab, dessen Inhalt $^1/_4$ von dem des gegebenen ist.

4. Die Mitten der vier Seiten eines Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms, das die Hälfte des Vierecks ist.

5. Zieht man durch einen Punkt einer Diagonale eines Parallelogramms die Parallelen zu den Seiten, so sind diejenigen entstandenen Parallelogramme gleich, durch welche die Diagonale nicht geht. (Satz von den Ergänzungsparallelogrammen.)

6. Die Linien JC und AE der Fig. 60 stehen senkrecht aufeinander.

7. Sind a, b zwei Strecken, so ist $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

8. Desgleichen $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

9. Desgleichen $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.

10. Im $\triangle ABC$ ist AE die Projektion der AB auf AC und AF die Projektion der AC auf AB. Beweise, daß die Rechtecke $AC \cdot AE$ und $AB \cdot AF$ einander gleich sind.

11. Welchen Satz erhält man aus 10, wenn das Dreieck bei B rechtwinklig ist?

12. Im rechtwinkligen Dreieck ist $bc = ah$.

13. In Fig. 70 ist ABC ein Dreieck, in dem $ACDE$ und $ABGF$ Parallelogramme über den Seiten AC und AB

sind. Es wird GF und DE bis zum Schnitt in H verlängert, alsdann HA gezogen und damit die Parallelen BJ und CK; verbinde J mit K. Es ist zu beweisen. daß $BCKJ$ ein Parallelogramm und $BCKJ = ACDE + ABGF$ ist. (Satz des Pappus.)

14. Den Pythagoreischen Lehrsatz mittels des Satzes Nr. 13 zu beweisen.

15. In Fig. 71 ist O die Mitte des größeren Kathetenquadrats, auch ist $GH \perp CB$, $EF \parallel CB$ gezogen. Weiter

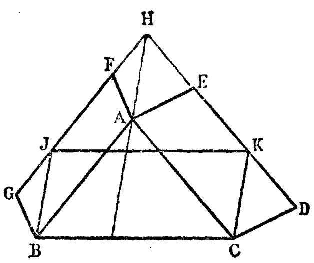


Fig. 70.

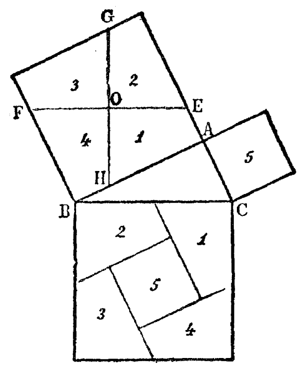


Fig. 71.

wird die Figur, wie die Zeichnung zeigt, zerlegt. Es ist durch diese Zerlegung der Pythagoreische Lehrsatz zu beweisen.

16. In jedem Parallelogramm ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2$.

17. In jedem Dreieck ist $4\,t_a{}^2 + a^2 = 2\,b^2 + 2\,c^2$.

18. In jedem Dreieck ist $4\,(t_a{}^2 + t_b{}^2 + t_c{}^2) = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$.

19. Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks auf die Seiten die Lote, welche diese in zwei Abschnitte zerlegen, so sind die beiden Summen aus den Quadraten je dreier nicht zusammenstoßender Abschnitte einander gleich.

20. Ist in einem Viereck g die Verbindungstrecke der Mitten der Diagonalen, so ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4g^2$.

21. Welchen Satz erhält man, wenn ein gegebenes Dreieck bei gegebener Richtlinie um eine gegebene Strecke verschoben wird?

22. Ziehe in einem regulären Sechseck von einer Ecke aus die Diagonalen und vergleiche die entstandenen Dreiecke nach ihrem Inhalt miteinander.

23. Verbindet man die Mitten zweier Gegenseiten eines Vierecks mit den Endpunkten ihrer gegenüberliegenden Seiten, so entstehen zwei Dreiecke, deren Summe gleich dem Viereck ist. (Ziehe zum Beweise eine Diagonale.)

24. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ sei E; verlängere EB um DE bis F und EC um AE bis G; ziehe FG, so ist $\triangle EFG$ gleich dem Viereck $ABCD$. (In Worten?)

25. Das $\triangle ABC$ in ein anderes zu verwandeln, so daß BC bleibt und $\sphericalangle ABC = \varphi$ wird.

26. Das $\triangle ABC$ in ein gleichschenkliges mit der Basis BC zu verwandeln.

27. Das $\triangle ABC$ in ein anderes zu verwandeln, so daß $BC = s$ und $\sphericalangle ABC = \varphi$ wird.

28. Das $\triangle ABC$ in ein anderes zu verwandeln, so daß $BC = s$ und $\sphericalangle BAC = \varphi$ wird.

29. Das Parallelogramm $ABCD$ in ein anderes zu verwandeln, so daß $BC = s$ und $AB = t$ wird.

30. Ein Parallelogramm in einen Rhombus mit gegebener Seite $= s$ zu verwandeln.

31. Desgleichen mit gegebener Diagonale $BD = s$.

32. Ein Parallelogramm in ein Rechteck mit gegebener Seite $= s$ zu verwandeln.

33. Desgleichen mit gegebener Diagonale $= s$.

34. Ein gegebenes Dreieck zu verdreifachen.

35. Durch den gegebenen Punkt P eine Linie zu ziehen, die das gegebene Parallelogramm $ABCD$ halbiert.

36. Das gegebene Parallelogramm $ABCD$ von A aus in vier gleiche Teile zu zerlegen.

37. Desgleichen in fünf gleiche Teile.

38. Eine Teilungslinie, die von einem Punkt einer Seite eines Vielecks ausgeht und nicht ganz in dasselbe fällt, vollständig in die Figur zu legen.

39. Ein Dreieck von einem innerhalb gelegenen Punkte aus in vier gleiche Teile zu teilen.

40. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden liegen.

41. Ein Quadrat und ein gleich großes Rechteck zu konstruieren, wenn die Summen s und s' aus der Quadratseite und je einer Rechteckseite gegeben sind.

42. Die Strecke AB in X so zu teilen, daß $AX^2 + BX^2 = s^2$ oder $AX^2 - BX^2 = d^2$ wird.

II. Abschnitt.

Ähnlichkeit.

11. Kapitel.

Proportionale Strecken, erzeugt durch Parallellinien.

§ 85. Das Messen der Strecken.

1. Die Strecke p (Größe p) durch die Strecke q (Größe q) messen, heißt angeben, wie oft letztere in ersterer enthalten ist. Daß p durch q gemessen werden soll, wird arithmetisch durch $p:q$, durch das Verhältnis p zu q, ausgedrückt. Das Ergebnis der Messung ist eine unbenannte Zahl, die Verhältniszahl genannt wird.

2. Dabei sind **drei** Fälle möglich:

a) Die Strecke q geht in der Strecke p auf; die Verhältniszahl ist eine ganze Zahl.

b) Die Strecke q geht in p nicht auf, aber ein aliquoter Teil von q ist in p enthalten; die Verhältniszahl ist eine gebrochene Zahl.

c) Weder die Strecke q selbst, noch ein aliquoter Teil von ihr ist in p enthalten. Die Verhältniszahl ist irrational. Ein Beispiel hierzu liefert das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck. Ist die Hypotenuse gleich p, die Kathete gleich q, so ergibt sich $p : q = \sqrt{2}$.

In den Fällen a) und b) sind die Strecken p, q kommensurabel, im Falle c) hingegen inkommensurabel zueinander. Jede irrationale Verhältniszahl läßt sich bis zu jedem beliebigen Grad von Genauigkeit durch eine rationale ersetzen. $\sqrt{2} = 1{,}4142$; $\sqrt{3} = 1{,}7321$; $\sqrt{5} = 2{,}2361$.

3. Ist die Verhältniszahl der Strecken p, q gleich derjenigen der beiden anderen s, t, so heißen die vier Strecken proportional; die Gleichsetzung beider Verhältnisse liefert die Proportion $p : q = s : t$ (p zu q wie s zu t).

4. Die Proportionalität der Strecken wird zunächst dazu verwendet, an geometrischen Gebilden Streckenpaare aufzusuchen bzw. herzustellen, welche dieselbe Verhältniszahl haben wie ein vorhandenes Paar.

§ 86. Der Proportionalsatz.

1. Um vier proportionale Strecken zu erhalten, geht man am einfachsten von einem Zweistrahl aus, der von zwei Parallelen geschnitten wird. In Fig. 72 entstehen dadurch auf dem einen Strahl die Strecken AC, AB,

und es wäre zu untersuchen, ob die Figur noch ein anderes Streckenpaar enthält, welches eine Verhältniszahl aufweist gleich der von $AC:AB$.

Setzt man voraus, daß die beiden Strecken AB, AC kommensurabel sind, so muß ein aliquoter Teil von AB in AC aufgehen. Ist dieser Teil in AB selbst n-mal, in AC m-mal enthalten, so hat $AC:AB$ den Wert m/n. Legt man nun durch die Teilpunkte Linien parallel mit CE, so wird AD in n, AE in m gleiche

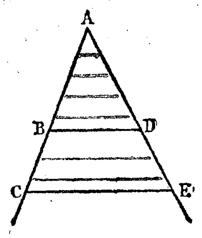


Fig. 72.

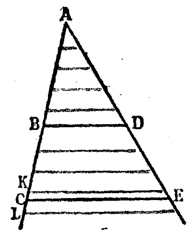


Fig. 73.

Teile geteilt, woraus auch für $AE:AD$ der Wert m/n folgt. Daher ist $AC:AB = AE:AD$.

Sind hingegen die Strecken AC und AB inkommensurabel, so zerlege man (Fig. 73) AB in n gleiche Teile; AC wird nun mehr als m und weniger als $(m+1)$ solcher Teile enthalten. Das Verhältnis $AC:AB$ ist demnach zwischen die Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ eingeschlossen. Durch ein dem obigen analoges Verfahren ergibt sich, daß auch $AE:AD$ zwischen den Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ liegt. Je größer man n wählt, d. i. die Anzahl der Teile, in welche man AB zerlegt, um so

mehr nähern sich beide Grenzen. Nach dem arithmetischen Satze: „Sind zwei Zahlen stets zwischen denselben Grenzen enthalten, so sehr sich letztere einander nähern, so sind die Zahlen einander gleich", ist somit auch in diesem Falle $AC:AB = AE:AD$.

2. Wendet man auf die soeben gefundene Proportion den Satz von der korrespondierenden Subtraktion an, so kommt $AB:(AC-AB) = AD:(AE-AD)$, d. h. $AB:BC = AD:DE$.

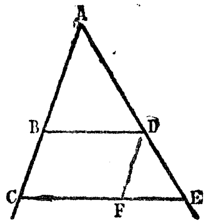


Fig. 74.

3. Fig. 74. Es ist nach Nr. 1 $AC:AB = AE:AD$ und nach Nr. 2 $BC:AB = DE:AD$, folglich $AC:BC = AE:DE$.

4. Ziehe durch D die Parallele zu AC, welche CE in F schneidet, so ist an dem Zweistrahl E nach Nr. 3 $EC:CF = EA:AD$. Weil aber $BD = CF$ ist, so hat man auch $CE:BD = AE:AD$. Ebenso findet man $CE:BD = AC:AB$. (Fig. 74.)

Diese Ergebnisse lassen sich in Worten so fassen:

Wird ein Zweistrahl von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich je zwei Abschnitte des einen Strahls wie die entsprechend liegenden des anderen, und die Parallelstrecken wie die vom Scheitel bis zu ihnen genommenen Abschnitte eines Strahles.

Bemerkung. a) Diese Sätze gelten auch noch, wenn die Parallelen zu verschiedenen Seiten des Scheitels liegen. b) Sie finden Anwendung bei der Konstruktion des verjüngten Maßstabes und des Proportionalzirkels.

§ 87. Kehrsatz.

Die Teile 1, 2, 3 des Proportionalsatzes lassen eine uneingeschränkte Umkehrung zu. Bilden z. B. in Fig. 75 die Strecken AC, AB, AE, AD die Proportion $AC:AB = AE:AD$, so läßt sich indirekt zeigen, daß $CE \parallel BD$ ist.

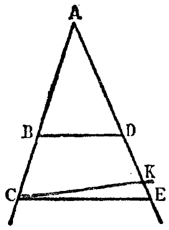


Fig. 75.

Ebenso beweist man die Kehrsätze zu 2, 3. In Worten:

Werden die Schenkel eines Zweistrahls von zwei Geraden so geschnitten, daß die Abschnitte auf dem einen Schenkel das gleiche Verhältnis wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Schenkel haben, so gehen die schneidenden Linien parallel.

§ 88. Aufgaben.

1. Zu den gegebenen Strecken a, b, c die vierte Proportionale x zu finden, so daß $a : b = c : x$ ist.

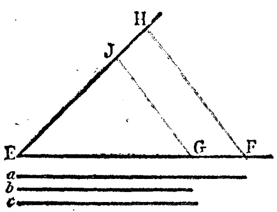


Fig. 76.

Konstruktion. Auf den Geraden des Zweistrahls E trage $EF = a$, $EG = b$, $EH = c$ ab, ziehe FH und $GJ \parallel FH$. Es ist EJ die verlangte Strecke x. Fig. 76.

Bemerkung. Ist x ein anderes als das vierte Glied der Proportion, so stelle man diese so um, daß x das letzte Glied wird.

2. Die gegebene Strecke AB in dem gegebenen Verhältnis $m : n$ zu teilen.

Konstruktion. Fig. 77. Mache $AC = m$; ziehe durch B die Parallele DE zu AC, so daß $BD = BE = n$ wird. Verbinde C mit D und E; diese Linien schneiden AB in F und G, durch welche Punkte die gewünschte Teilung erfolgt.

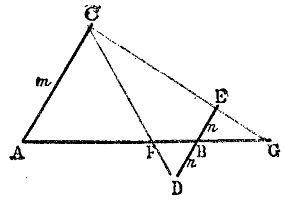


Fig. 77.

Beweis. Es ist $AF:FB = AC:BD$ und $AG:BG = AC:BE$; aber weil $AC = m$, $BD = BE = n$ ist, so erhält man $AF:BF = m:n$ und $AG:BG = m:n$.

3. Bemerkung. Man sagt, die Punkte F und G teilen AB im Verhältnis $m:n$ harmonisch. Ist nämlich $m:n = 3:1$, so geben Saiten von den Längen AG, AB, AF Grundton, Quint, Oktav; ist $m:n = 5:1$, so erzeugen sie den Dreiklang (Grundton, Terz, Quint). Die Pythagoreer nannten die Proportion $(a-x):(x-b) = a:b$ eine harmonische.

§ 89. Transversalen.

Eine nähere Untersuchung der zweiten Aufgabe des vorigen Paragraphen liefert interessante Eigenschaften der Schwerlinie eines Dreiecks. Es ist klar, daß — Fig. 78 — die Punkte F und G durch A, B und das Verhältnis $m:n$ eindeutig bestimmt sind. Verlängert man demnach CA um sich selbst bis K, so muß KE durch F und KD durch G gehen. Erhält nun $m:n$ den Wert $2:1$, so sind

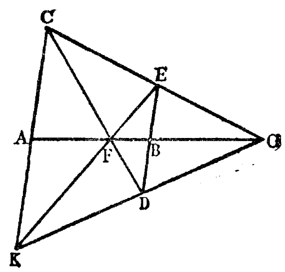


Fig. 78.

AG, CD, KE die Schwerlinien des $\triangle CKG$. Auch ist $CF : FD = AC : BD = 2 : 1$. In Worten:

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Transversalen in einem Punkt (Schwerpunkt) im Verhältnis $2 : 1$.

Bemerkung. Der Schwerpunkt ist der vierte merkwürdige Punkt des Dreiecks.

§ 90. Medianen.

1. Die Tatsache, daß im gleichschenkligen Dreieck die Mediane des Winkels an der Spitze die Grundseite in zwei gleiche Teile teilt, weist auf eine einfache Beziehung zwischen den beiden Abschnitten auf der dritten Seite und den anstoßenden Seiten für den Fall hin, daß letztere nicht gleich sind. Dieser Zusammenhang soll nun aufgedeckt werden. In Fig. 79 halbiere AF den $\sphericalangle A$ des Dreiecks BAC. Wird $CD \parallel FA$ gezogen, so ist $\sphericalangle \alpha = \gamma$, $\sphericalangle \beta = \delta$; da aber $\alpha = \beta$ ist, so folgt $\sphericalangle \gamma = \delta$ und daraus $AD = AC$. Ferner ist $BF : FC = BA : AD$; folglich $BF : CF = AB : AC$. Ebenso zeigt man, wenn AE den Außenwinkel CAD halbiert, daß die Proportion gilt $BE : CE = AB : AC$. In Worten:

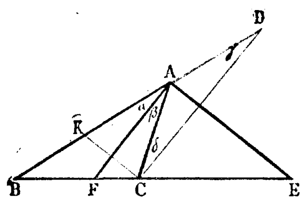


Fig. 79.

In jedem Dreieck teilt die Halbierungslinie eines Innen- oder Außenwinkels die Gegenseite im Verhältnis der anstoßenden Seiten.

Bemerkung. Wird der Zweistrahl B von den beiden Parallelen AF, DC so geschnitten, daß AF den $\sphericalangle BAC$ halbiert, so erhält man die soeben benützte Figur. Hieraus ergibt sich die Bedeutung der Hilfslinie CD und die Folgerung, daß der Mediansatz ein besonderer Fall des Proportionssatzes ist.

2. Als Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen AF und AE senkrecht aufeinander; mithin geht der über FE als Durchmesser beschriebene Kreis durch A. Dieser Kreis wird nach Apollonius von Perga (200 v. Chr.) der Apollonische Kreis genannt.

3. **Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten ein konstantes Verhältnis der Entfernungen hat, ist der Apollonische Kreis.** — Verwendung bei Dreiecksaufgaben, in denen die Grundseite und das Verhältnis der Nebenseiten gegeben ist.

§ 91. Übungen.

1. Werden zwei Geraden von drei Parallelen geschnitten, so sind die Abschnitte auf der einen Geraden den gleichliegenden auf der anderen proportional.

2. Wird ein Dreistrahl von zwei Parallelen getroffen, so sind die gleichliegenden Abschnitte auf letzteren proportional.

3. Die eine Diagonale eines Parallelogramms halbiert alle Strecken, welche parallel der anderen Diagonale in dem Parallelogramm gezogen werden.

4. Die Diagonalen eines Trapezes schneiden sich im Verhältnis der Grundseiten.

5. Teilt man die Seite AB des $\triangle ABC$ in D so, daß sich verhält $AD:DB = m:n$, und zieht man durch D die Parallele zu BC, so wird auch AC in E im Verhältnis $m:n$ geschnitten, und die Parallele DE ist gleich $\frac{m}{m+n} \cdot BC$.

6. Teilt man die Nebenseiten AB und DC des Trapezes $ABCD$ in gleicher Weise im Verhältnis von $m:n$, so ist die Verbindungslinie der Teilpunkte den Grundseiten parallel und gleich $(mb+nd):(m+n)$.

7. Wie heißen die Umkehrungen der Medianensätze und ihre Beweise?

8. Die drei Schwerlinien zerlegen das Dreieck in sechs gleiche Teile.

9. Fällt man von den drei Ecken und dem Schwerpunkt S eines Dreiecks Lote auf eine Gerade, so ist das von S gefällte Lot das arithmetische Mittel aus den drei anderen.

10. Wenn irgend eine Gerade die Seiten eines Dreiecks schneidet (bzw. deren Verlängerungen), so sind die beiden Produkte je dreier nicht anstoßender Abschnitte der Seiten gleich. (Satz des Menelaos.)

11. Umkehrung dieses Satzes.

12. Die Halbierungslinien zweier Dreieckswinkel und die Mediane des Außenwinkels an der dritten Ecke schneiden die Gegenseiten in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen.

13. Verbindet man einen Punkt mit den Ecken eines Dreiecks, so teilt jede Verbindungslinie die Gegenseite derart in zwei Abschnitte, daß die beiden Produkte je aus drei nicht anstoßenden Segmenten einander gleich sind. (Satz des Bernoulli, auch Satz des Ceva genannt.)

14. Umkehrung dieses Lehrsatzes.

15. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten der drei den Gegenseiten anbeschriebenen Kreise schneiden sich in einem Punkte. (Fünfter merkwürdiger Punkt des Dreiecks.)

16. Die Strecke AB in drei Teile zu zerlegen, die sich wie $m:n:p$ verhalten.

17. Aus der Summe bzw. der Differenz zweier Strecken und ihrem Verhältnis $m:n$ die Strecken zu bestimmen.

18. Durch den Punkt A eine Gerade zu ziehen, deren Abstände von B, C sich wie $m:n$ verhalten.

19. Eine Gerade zu finden, deren Entfernungen von A, B, C sich wie $m:n:p$ verhalten.

20. Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, dessen Abstände von zwei Geraden das Verhältnis $m:n$ haben.

21. In einem Dreieck den Punkt zu finden, dessen Entfernungen von den drei Seiten sich wie $m:n:p$ verhalten.

22. $\triangle$ aus a, t_b, t_c.

23. $\triangle$ aus α, t_b, t_c.

24. $\triangle$ aus a, h_a, $b:c$.

25. $\triangle$ aus u, v, $b-c$.

26. Parallelogramm aus a, ε, $e:f=m:n$.

27. $\triangle$ aus dem Inhalt, a und $b:c=m:n$.

28. Auf dem Umfang eines Kreises sind die Punkte C, B gegeben. Auf dem Kreis den Punkt A so zu finden, daß $AC:AB=m:n$ sei.

29. In einem Trapez parallel den Grundseiten eine Gerade so zu ziehen, daß die von den Nebenseiten und einer Diagonale begrenzten Abschnitte gleich werden.

30. Durch einen Punkt P innerhalb eines gegebenen Kreises die Sehne XY so zu ziehen, daß $PX:PY=m:n$ werde.

31. Innerhalb des $\triangle ABC$ den Punkt X so zu bestimmen, daß seine Entfernungen von den Ecken sich wie $m:n:p$ verhalten.

32. In einem gegebenen Kreis fünf Quadrate so zu zeichnen, daß das mittlere mit jedem äußeren eine Seite gemeinsam habe und die äußeren acht Ecken auf der Kreislinie liegen.

12. Kapitel.

Proportionale Strecken, erzeugt durch Wechsellinien.

§ 92. Erklärungen.

1. Fig. 80. Wendet man in der Figur des Proportionalsatzes die eine der beiden Parallelen, z. B. DE,

um die Mediane des Zweistrahls um, wodurch sie in die Lage $D'E'$ gelangt, so nennt man diese umgeklappte Linie $D'E'$ samt der anderen Parallele **Wechsellinien.** Ferner heißen die Winkel $AE'D'$ und ACB, die nach einer Zurückklappung Gegenwinkel würden, **korrespondierende** Winkel.

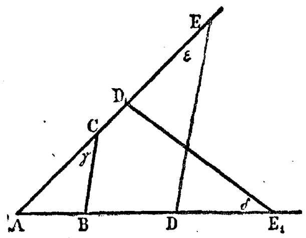


Fig. 80.

2. a) Weil $\sphericalangle\gamma = \varepsilon$, $\sphericalangle\varepsilon = \delta$ ist, so folgt $\sphericalangle\gamma = \delta$. D. h.:

Korrespondierende Winkel an Wechsellinien sind gleich.

b) Des weiteren ist $AD' = AD$, $AE' = AE$. Somit geht die Proportion $AC : AB = AE : AD$ in folgende über: $AC : AB = AE' : AD'$, daher $AC \cdot AD' = AB \cdot AE'$. D. h.:

Wird ein Zweistrahl von zwei Wechsellinien geschnitten, so ist das Produkt der vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf der einen Geraden gleich dem Produkt der Abschnitte auf der anderen.

Bemerkung. Die Sätze a, b lassen sich auch umkehren.

3. Da ferner $D'E' = DE$ ist, so liefern die Proportionen $AC : BC = AE : ED$ und $AB : BC = AD : DE$ die beiden nachstehenden: $AC : BC = AE' : E'D'$ und $AB : BC = AD' : D'E'$.

§ 93. Wechsellinien am Dreieck und am Kreis.

1. In Fig. 81 sind AE, BD zwei Höhen des Dreiecks ABC. Die Winkel δ, ε sind einander gleich

und korrespondierende Winkel; mithin sind AE und BD Wechsellinien im Zweistrahl C. Daher gilt die Beziehung $CA : CB = AE : BD$. D. h.:

In jedem Dreieck verhalten sich zwei Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

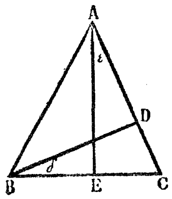


Fig. 81.

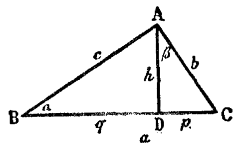


Fig. 82.

2. Ist in Fig. 82 ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe AD, so ist bekannt, daß die $\sphericalangle \alpha, \beta$ gleich sind. Auch liegen sie korrespondierend; mithin sind AD, AB Wechsellinien des Zweistrahls C. Folglich ist $b^2 = a \cdot p$; ebenso $c^2 = a \cdot q$. D. h.:

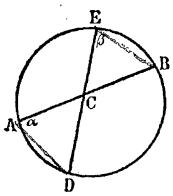
Im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und ihrer Projektion auf diese. (Kathetensatz.)

3. In gleicher Weise findet man $h^2 = p \cdot q$. D. h.:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe mittlere Proportionale zu den beiden Abschnitten der Hypotenuse. (Höhensatz.)

4. Schneiden sich (Fig. 83) zwei Sehnen AB, ED innerhalb oder außerhalb eines Kreises, und zieht man AD, EB, so sind diese Geraden Wechsellinien, denn die korrespondierenden Winkel α, β sind einander gleich. Folglich ist $CA \cdot CB = CD \cdot CE$. Das gleiche Produkt liefert jede durch C gezogene Sehne. D. h.:

Legt man durch einen Punkt Linien, die einen Kreis schneiden, so hat das Produkt aus den vom Punkte einerseits und vom Kreise andererseits begrenzten Abschnitten für jede Gerade den gleichen Wert. (Sehnensatz.)



5. Wird eine Sekante zur Tangente — Fig. 84 —, so sind auch diesmal EA, DA Wechsellinien. Demnach ist $CA^2 = CD \cdot CE$. Das näm-

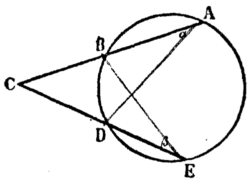


Fig. 83.

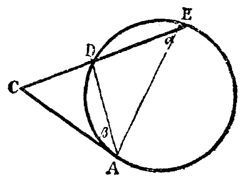


Fig. 84.

liche Produkt liefert jede andere durch C gezogene Sekante. Daher:

Legt man durch einen Punkt Sekanten und die beiden Tangenten an einen Kreis, so ist jede Tangente mittlere Proportionale zwischen den von dem Punkte einerseits und dem Kreise andererseits begrenzten Abschnitten auf jeder Sekante. (Tangentensatz.)

Wie heißen die Kehrsätze zu Nr. 4, 5?

§ 94. **Aufgabe.**

Zu zwei gegebenen Strecken p, q die mittlere Proportionale zu finden.

Konstruktion. Schneide auf einer Geraden — Fig. 85 — $AB = p$, $BC = q$ ab. Errichte über AC als Durchmesser den Halbkreis und auf AC in B das Lot. Beide Linien schneiden sich in E. Es ist BE die gesuchte Proportionale. — Beweis nach § 93, 3.

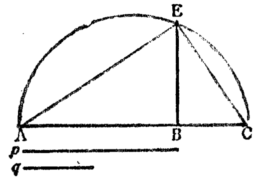


Fig. 85.

Löse die vorliegende Aufgabe mit dem Katheten-, Sehnen- und Tangentensatz.

Bemerkung. Sind bei der vorigen Aufgabe die Strecken $AB = p$ und $BE = h$ gegeben und ist $BC = x$ aus der Gleichung $h^2 = px$ zu bestimmen, so wird x die dritte Proportionale zu p und h^2 genannt. Durch welche Konstruktionen läßt sich x ermitteln?

§ 95. Die stetige Teilung.

1. Der Satz 5 des Paragraphen 93 enthält einen interessanten speziellen Fall. Wird nämlich die Figur 84 so entworfen, daß CE Zentrale und die Tangente CA so lang wie der Durchmesser wird — Fig. 86 —, so gilt immer $CA^2 = CD \cdot CE$ oder jetzt $DE^2 = CD \cdot CE$.

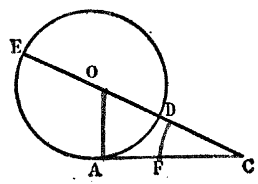


Fig. 86.

2. Eine Strecke ist stetig geteilt, wenn der größere Abschnitt (Maior) mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Teil (Minor) ist. In Fig. 86 ist EC in D stetig geteilt. Die stetige Teilung heißt auch der goldene, göttliche Schnitt (sectio aurea, divina).

3. Macht man in Fig. 86 $CF = CD$, so ist zunächst nach dem Tangentensatz $CE : CA = CA : CD$, hieraus $(CE - CA) : CA = (CA - CD) : CD$. Indessen ist $ED = AC$, $CF = CD$. Daher $CF : CA = AF : CF$. D. h. AC ist in F stetig geschnitten.

4. Da sowohl AC als auch EC nach dem goldenen Schnitte geteilt sind, so ergibt sich durch Zusammennehmen beider Resultate: a) Wird eine stetig geteilte Strecke um den Maior verlängert, so ist die ganze Strecke stetig geteilt. b) Wird auf dem Maior einer stetig geteilten Strecke der Minor abgetragen, so ist ersterer stetig geteilt.

§ 96. Aufgabe.

Die gegebene Strecke AC stetig zu teilen.

Konstruktion. Fig. 86. Errichte auf AC in A das Lot $OA = \frac{1}{2} AC$. Beschreibe um O den Kreis, der AC in A berührt; ziehe CO. Diese Gerade schneidet den Kreis in D. Trage auf CA die Strecke $CF = CD$ ab, so ist AC in F wie verlangt geteilt. — Beweis nach § 95, 3.

§ 97. Das regelmäßige Zehn- und Fünfzehneck.

1. Eine nach dem goldenen Schnitt zerlegte Strecke kann in fruchtbarer Weise zum Aufbau geometrischer Figuren verwendet werden. Dieser Paragraph zeigt, wie die Konstruktion des regulären Zehnecks damit zusammenhängt. In Fig. 87 sei AB die Zehneckseite, C der Mittelpunkt des um das Polygon beschriebenen Kreises. Der $\sphericalangle \gamma$ ist daher $= 36^0$, folglich $\sphericalangle \alpha = \beta = 72^0$. Halbiert man $\sphericalangle CAB$ durch AD, so ist $\alpha' = \alpha'' = 36^0$. Ferner $\sphericalangle \delta = 72^0$. Diese Rechnung führt zu der Tatsache, daß $CD = AD = AB$ ist. Sie zeigt aber auch, daß AD und AC Wechsellinien des

Zweistrahls B sind. Deswegen gilt die Gleichung $AB^2 = BD \cdot BC$, und weil $CD = AB$ ist, auch die andere $CD^2 = BD \cdot BC$. D. h. BC ist in D stetig geteilt und AB ist gleich dem Maior. In Worten:

Die Seite des regulären Zehnecks ist gleich dem Maior des stetig geteilten Radius.

2. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Zehneck zu konstruieren.

Konstruktion. Teile einen Radius stetig und trage den Maior zehnmal aufeinanderfolgend als Sehne ein.

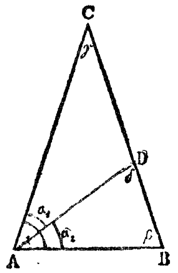


Fig. 87.

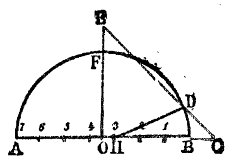


Fig. 88.

3. Mit Hilfe des Zehnecks läßt sich auf einfache Weise das reguläre 5, 20, 40, 80 ... Eck erhalten.

4. Der Zentriwinkel des regelmäßigen Sechsecks ist 60^0, derjenige des Zehnecks 36^0, der Unterschied beider Winkel beträgt 24^0. Da aber $360^0 : 24^0 = 15$ ist, so wird damit auch die Herstellung des regelmäßigen 15-Ecks angedeutet. Fortgesetztes Halbieren der Zentriwinkel liefert das 30, 60, 120 ... Eck.

5. Mit Zirkel und Lineal lassen sich nun folgende reguläre Polygone konstruieren: das 3, 6, 12 ... Eck, das 4, 8, 16 ... Eck, das 5, 10, 20 ... Eck, das 15,

30, 60 ... Eck. Außer diesen ist die Herstellung eines n-Ecks möglich, wenn n eine Primzahl und wenn zugleich $(n-1)$ eine Potenz von 2 ist; also z. B. das 17, 257, 65 537-Eck. Diese Tatsache hat Gauß 1796 gefunden. Die anderen regelmäßigen Vielecke müssen durch Annäherungsverfahren konstruiert werden. Ein solches, für jedes $n > 5$ passende wurde von Karl Bernhard zu Sachsen-Weimar angegeben. Man teile — Fig. 88 — den Durchmesser AB in n (hier 7) gleiche Teile, verlängere AB bis C und den zu AB senkrechten Radius OF bis E um je einen Teil. Ziehe CE, welche Linie den Kreis in D schneidet. Verbinde D immer mit dem dritten Teilpunkte H (von B aus gerechnet). Die Strecke DH ist mit großer Annäherung die Seite des gesuchten n (hier 7)-Ecks.

§ 98. Bemerkungen zum goldenen Schnitt.

In seiner Abhandlung „divina proportione" behandelt (1497) Luca Paciuoli den goldenen Schnitt ziemlich ausführlich. Er führt 13 Beziehungen an einer stetig geteilten Linie auf, die er Wirkungen nennt. Die große Arbeit von Pfeiffer (1885) „Der goldne Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst" hat es wahrscheinlich gemacht, daß die stetige Teilung häufig auftritt. Pfeiffer untersuchte diesbezüglich den menschlichen Körper, Tiere, Pflanzen, Werke der Bau- und Tonkunst, der Plastik, der Malerei. Man vergleiche auch Zeising, „Die Proportionen des menschlichen Körpers", 1854, und Lersch, „Die harmonischen Verhältnisse in den Bahnelementen des Planetensystems", 1880. Wird die zu teilende Strecke $= 1$ gesetzt, so ist der Wert des Maior $= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

Verwandelt man diesen Ausdruck in einen Kettenbruch, so erhält man

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Die Näherungswerte desselben sind $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$ usw. — Lamésche Reihe. — Diese Brüche geben merkwürdigerweise die Stellung der Blätter an den Zweigen, der Schuppen an den Zapfen u. dgl. an.

§ 99. Übungen.

1. Kehrsätze zu § 93, 2 und 3.

2. Welchen Satz erhält man aus dem Sehnensatz, wenn durch einen Punkt innerhalb eines Kreises die größte und die kleinste Sehne gezogen wird?

3. Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks teilt jede Höhe in zwei Abschnitte, und es sind die drei Produkte aus den beiden Abschnitten derselben Höhe einander gleich.

4. Die mittlere Proportionale von zwei Strecken ist kleiner als deren arithmetisches Mittel.

5. Berühren sich zwei Kreise von außen, so ist das Stück der gemeinsamen Tangente zwischen den Berührungspunkten mittlere Proportionale zu den beiden Durchmessern.

6. Im rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die Kathetenquadrate wie die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

7. Schneiden sich zwei Kreise und zieht man von einem Punkte der verlängerten gemeinsamen Sehne die Tangenten an die Kreise, so sind deren Abschnitte bis zu den Berührungspunkten gleich. Eine Linie von solcher Eigenschaft heißt Chordale.

8. Sind A, B die Zentren, r und ϱ die Radien beider Kreise, C ein Punkt der Chordale, so ist $AC^2 - CB^2 = r^2 - \varrho^2$.

9. Die Chordale steht auf der Zentrale senkrecht.

10. Welche Linie ist Chordale, wenn sich die Kreise berühren?

11. Wie erhält man die Chordale, wenn sich die Kreise nicht schneiden?

12. Die Chordale halbiert die zwischen den Berührungspunkten gelegenen Abschnitte der äußeren und inneren gemeinschaftlichen Tangenten.

13. Die drei Chordalen dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

14. In einem rechtwinkligen Dreieck sei eine Kathete die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und der anderen Kathete. Es sollen Eigenschaften dieses Dreiecks angegeben werden.

15. Zieht man im regulären Fünfeck zwei sich schneidende Diagonalen, so teilt der Schnittpunkt jede stetig und der Maior ist gleich der Fünfeckseite.

16. Im regulären Fünfeck werden zwei nicht aufeinanderfolgende Seiten bis zum Schnitt verlängert. Wie lang ist jede Verlängerung?

17. Zwei Strecken zu konstruieren, deren Summe und mittlere Proportionale gegeben ist.

18. Desgleichen, wenn statt der Summe die Differenz gegeben ist.

19. Einen Winkel von 18^0 zu konstruieren.

20. Über der festliegenden Strecke AB als Seite des Zehnecks oder des Fünfzehnecks das genannte regelmäßige Vieleck zu konstruieren.

21. Auf einem Radius eines Kreises zwei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke zu konstruieren, deren Spitzen auf der Peripherie liegen.

22. Einen Kreis zu finden, der durch A und B geht und so liegt, daß die von C an ihn gezogene Tangente $= t$ wird.

23. $\odot$ aus A, B, L.

24. $\odot$ aus A, L, L'.

25. $\odot$ aus A, B, K.

26. In dem Dreieck ABC von A nach BC die Gerade AE so zu ziehen, daß $AE^2 = BE \cdot CE$ werde.

27. Zwei Strecken zu finden, deren Quadrate sich wie $p : q$ verhalten.

28. Die gegebene Strecke AB so zu teilen, daß sich die Quadrate der Abschnitte wie $p : q$ verhalten.

29. Auf der gegebenen Geraden L den Punkt X zu finden, von dem aus die gegebene Strecke AB unter dem größten Winkel erscheint.

30. Im dem $\triangle ABC$ eine die AB in X und die AC in Y schneidende Parallele zu BC so zu ziehen, daß $XY^2 = BX \cdot AX$ werde.

13. Kapitel.

Ähnlichkeit der Vielecke.

§ 100. Einführung.

1. Zwei Vielecke von gleicher Seitenzahl heißen ähnlich ($\sim$ von s, similis ähnlich), wenn die Winkel des einen den Winkeln des anderen einzeln verglichen gleich und alle entsprechenden Seiten proportional sind. Z. B. ist Viereck $ABCD \sim A'B'C'D'$, wenn $\sphericalangle A = A'$, $\sphericalangle B = B'$, $\sphericalangle C = C'$, $\sphericalangle D = D'$, und $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'$ oder $AB : BC : CD : DA = A'B' : B'C' : C'D' : D'A'$.

2. Ähnliche Vielecke haben gleiche Gestalt, gleiche Form; kongruente Vielecke sind auch ähnlich.

3. Sind zwei Vielecke einem dritten ähnlich, so sind sie auch unter sich ähnlich.

4. Wenn von zwei kongruenten Vielecken das eine einem dritten ähnlich ist, so ist auch das andere dem dritten ähnlich.

§ 101. Die Ähnlichkeit der Dreiecke.

1. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite die Parallele, so wird ein zweites Dreieck abgeschnitten, das dem gegebenen ähnlich ist.

2. **I. Ähnlichkeitssatz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportional und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Beweis. Fig. 89. Ist in den $\triangle ABC$ und DEF $\sphericalangle \beta = \varepsilon$, $AB : BC = DE : EF$, so trage man auf BC die Strecke $BK = EF$ ab und ziehe $KL \parallel CA$. Nun ist $AB : BC = BL : BK$. Aus dieser Proportion und derjenigen der Voraussetzung ergibt sich $BL = ED$. Mithin $\triangle LBK \cong DEF$. Nach Nr. 1 ist $LBK \sim ABC$, daher auch $DEF \sim ABC$.

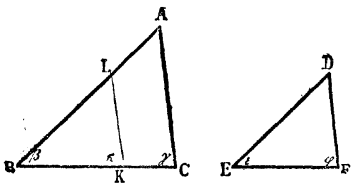


Fig. 89.

3. **II. Ähnlichkeitssatz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen zweien Winkeln des anderen gleich sind.

Beweis. Fig. 89. Ist diesmal $\sphericalangle \beta = \varepsilon$, $\sphericalangle \gamma = \varphi$, so konstruiere man wie vorhin. Dadurch wird $\sphericalangle \varkappa = \gamma$; aber es ist $\sphericalangle \gamma = \varphi$; daher ist $\sphericalangle \varkappa = \varphi$. Nun ist $\triangle LBK \cong DEF$ und $\triangle BKL \sim BCA$, daher auch $\triangle DEF \sim ABC$.

4. **III. Ähnlichkeitssatz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen denen des anderen proportional sind.

Beweis. Fig. 89. Es ist vorausgesetzt $AB:BC:AC = DE:EF:FD$. Konstruiere wie oben; dann ist $AB:BC:CA = LB:BK:KL$. Beide Proportionen liefern das Ergebnis $BL = ED$, $KL = FD$. Mithin ist $\triangle LBK \cong DEF$ und damit auch $\triangle DEF \sim ABC$.

5. **IV. Ähnlichkeitssatz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien des anderen proportional und die der größeren von beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich sind.

Beweis. Fig. 89. Die Voraussetzung ist $AB:BC = DE:EF$, $\sphericalangle \gamma = \varphi$; $AB > BC$; $DE > EF$. Man konstruiere wie oben. Dadurch erhält man $AB:BC = LB:BK$; also ist $BL = ED$. Auch ist $\sphericalangle \varkappa = \gamma$, $\sphericalangle \gamma = \varphi$; somit ist $\sphericalangle \varkappa = \varphi$; folglich ist $\triangle LBK \cong DEF$ und hiermit auch $\triangle DEF \sim ABC$.

6. Bemerkung. a) Die Gestalt eines Dreiecks ist eindeutig bestimmt durch das Verhältnis zweier Seiten und den eingeschlossenen Winkel, durch zwei Winkel, durch das Verhältnis der drei Seiten, durch das Verhältnis zweier Seiten und den Gegenwinkel der größeren Seite. Wie lauten die entsprechenden Sätze für das rechtwinklige, das gleichschenklige, das gleichseitige und das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck? b) Die Ähnlichkeit der Dreiecke ist ein vorzügliches Mittel, die Gleichheit zweier Winkel oder die Proportionalität von Strecken zu erweisen.

7. Zusatz. a) In ähnlichen Dreiecken haben je zwei homologe Höhen, Transversalen, Medianen, Radien das gleiche Verhältnis wie zwei entsprechende Seiten.

b) Die Form, Gestalt eines Dreiecks ist durch zwei voneinander unabhängige Bedingungen bestimmt.

§ 102. Aufgabe.

Viele Konstruktionsaufgaben werden in der Weise gelöst, daß man $(n-1)$ der gegebenen Bedingungen dazu benutzt, die Gestalt der gesuchten Figur herzustellen; die so erhaltene Figur wird unter Beibehaltung der Form so vergrößert bzw. verkleinert, daß sie noch die n-te Bedingung erfüllt.

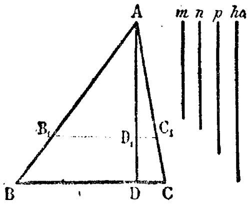


Fig. 90.

Beispiel: $\triangle$ aus $a:b:c = m:n:p$ und h_a.

Konstruktion. Fig. 90. Zeichne das Formdreieck AB_1C_1 aus $B_1C_1 = m$, $C_1A = n$, $AB_1 = p$. Fälle die Höhe AD_1 und trage darauf $AD = h_a$ ab. Durch D ziehe die Grundseite $BC \parallel B_1C_1$, so ist ABC das verlangte Dreieck.

§ 103. Satz des Ptolemäus.

Die Seiten und Diagonalen eines Sehnenvierecks stehen in einer einfachen Beziehung zueinander, die durch die Ähnlichkeit der Dreiecke erschlossen werden kann. Macht man nämlich in dem Sehnenviereck $ABCD \measuredangle BAK = DAC$, so ist $\triangle ABK \sim ACD$. Hieraus folgt $a:BK = e:c$ oder $a \cdot c = e \cdot BK$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AKD und ABC ergibt sich ebenso $b \cdot d = e \cdot DK$. Addiert: $ac + bd = e \cdot (BK + KD) = ef$. D. h.:

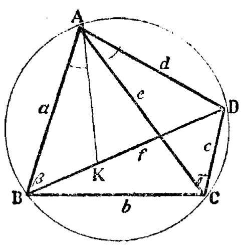


Fig. 91.

In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den Gegenseiten.

Ptolemäus in Alexandria 125 n. Chr.

§ 104. Übungen.

1. Ähnliche Polygone werden durch die Diagonalen, die von zwei homologen Ecken ausgehen, in paarweise ähnliche Dreiecke zerlegt.

2. Parallelogramme sind ähnlich, wenn zwei anstoßende Seiten gleiches Verhältnis haben und die eingeschlossenen Winkel einander gleich sind. Rechtecke sind ähnlich, wenn zwei anstoßende Seiten gleiches Verhältnis haben. Rhomben sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen.

3. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ein Paar homologer Seiten.

4. Die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie zwei entsprechende Strecken.

5. Welchen Satz erhält man aus dem Ptolem. Lehrsatz, wenn das Sehnenviereck in ein Rechteck übergeht?

6. Beweise die Sätze des 12. Kapitels mittels ähnlicher Dreiecke.

7. Ein Vieleck mit einer gegebenen Seite zu konstruieren, welches einem gegebenen Vieleck ähnlich ist.

8. $\triangle$ aus $b:c=m:n$, α, t_a.

9. $\triangle$ aus $b:c=m:n$, α, r.

10. $\triangle$ aus β, γ, w_a.

11. $\triangle$ aus $h_a:h_b=m:n$, γ, ϱ.

12. Rechtwinkliges $\triangle$ aus $b:c=m:n$, h.

13. Gleichschenkliges $\triangle$ aus $a:b=m:n$, h_b.

14. Rechteck aus $a:b=m:n$, e.

15. Rhombus aus $e:f=m:n$, a.

16. Viereck aus $a:b:c:d=m:n:p:q$, α, e.

17. Viereck aus $a:b=m:n$, β, $\sphericalangle fd$, $\sphericalangle fc$, e.

17a. Ein Viereck, in und um welches ein Kreis beschrieben werden kann, aus $a:b=m:n$, e, β zu konstruieren.

18. Dem gegebenen Dreieck ABC ein Quadrat einzubeschreiben. (Zeichne über BC als Seite nach außen das Quadrat $BCDE$ und verbinde A mit E und D.)

19. In einen Sektor ein Quadrat zu beschreiben, so daß zwei Ecken auf dem Bogen liegen.

20. In ein Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, dessen Seiten sich wie $m:n$ verhalten.

21. In ein Dreieck einen Rhombus zu beschreiben, dessen Diagonalen das Verhältnis $m:n$ haben.

22. In dem $\triangle ABC$ sei H der Schnittpunkt der Höhen, O der Schnittpunkt der Mittellote OD, OE und OF auf den Seiten BC, CA und AB, ferner S der Schwerpunkt des Dreiecks. Zu beweisen, daß

a) $AH = 2 \cdot OD$, $BH = 2 \cdot OE$, $CH = 2\,OF$ ist;

b) die Punkte O, S und H auf einer Geraden liegen und $HS = 2 \cdot SO$ ist (Satz des Euler);

c) die Mitte von OH das Zentrum eines Kreises ist, der durch die Mitten der Seiten und der oberen Höhenabschnitte wie auch durch die Fußpunkte der Höhen geht (Feuerbachscher Kreis, 1822).

23. Es sind B und C die Mittelpunkte zweier Kreise, BD und CE zwei gleichgerichtete, BD und CF zwei gegengerichtete parallele Radien. Die Linien DE und DF schneiden die Zentrale in A und J, welche Punkte die Ähnlichkeitspunkte der Kreise und zwar A der äußere, J der innere genannt werden. Man soll zeigen, daß A und J feste Punkte der Zentrale sind, ferner daß A der Schnittpunkt der äußeren gemeinsamen Tangenten, J derjenige der inneren gemeinsamen Tangenten ist.

24. Die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise zu konstruieren.

25. Desgleichen, wenn sich die Kreise von außen, von innen berühren.

26. Desgleichen, wenn die Kreise konzentrisch liegen.

27. Desgleichen, wenn die Kreise gleich groß sind.

28. Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen auf einer Geraden.

29. Je zwei innere Ähnlichkeitspunkte und ein äußerer liegen auf einer Geraden.
30. ⊙ aus A, L, K.
31. ⊙ aus A, K, K'.
32. In jedem Dreieck ist $b \cdot c = 2 \cdot r \cdot h_a$.
33. In jedem Dreieck ist $w_a{}^2 = b \cdot c - u \cdot v$.

14. Kapitel.

Die Ausmessung geradliniger Figuren.

§ 105. Das Verhältnis von Inhalten.

1. Um das Verhältnis der Inhalte zweier geradliniger Figuren zu ermitteln, geht man erfahrungsgemäß von zwei Rechtecken $ABCD$, $EFGH$ aus — Fig. 92 —, welche eine gleiche Grundseite $AB = EF$ haben. Sind die Höhen BC und FG kommensurabel, so wird das gemeinsame Maß in BC m-mal und in FG n-mal enthalten sein. Die durch die Teilpunkte zu der Grundseite parallel gezogenen Linien zerlegen das Rechteck $ABCD$ in m, das Rechteck $EFGH$ in n untereinander gleiche Rechtecke. Daher $ABCD : EFGH = m : n$; weil aber auch $BC : FG = m : n$, so folgt $ABCD : EFGH = BC : FG$. Man kann jedoch in einem Rechteck jede Seite zur Grundseite nehmen, mithin:

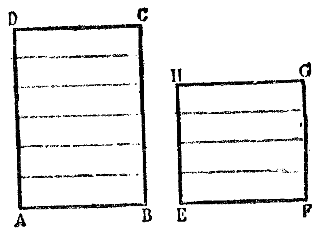


Fig. 92.

Zwei Rechtecke mit gleicher Grundseite (Höhe) verhalten sich dem Inhalt nach wie die Höhen (Grundseiten).

Wenn die Höhen nicht kommensurabel sind, so wende man zur Beweisführung ein Verfahren an, das dem des § 86, 1 analog ist.

2. Haben die Rechtecke F und F' neben den ungleichen Höhen h, h' auch noch ungleiche Grundseiten g, g', so konstruiere man zur Ermittlung des Inhaltsverhältnisses das Rechteck F'' mit der Grundseite $= g$ und der Höhe $= h'$. Alsdann ist nach Nr. 1 $F : F'' = h : h'$, ferner $F'' : F' = g : g'$; daher $F : F' = g \cdot h : g' \cdot h'$. In Worten:

Die Inhalte zweier Rechtecke verhalten sich wie die Produkte aus zwei anstoßenden Seiten.

3. Jedes Parallelogramm läßt sich in ein Rechteck mit gleicher Grundseite und Höhe verwandeln, und jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe. Daher:

a) **Die Inhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke mit gleicher Grundseite (Höhe) verhalten sich wie die Höhen (Grundseiten).**

b) **Die Inhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus Grundseite und Höhe.**

4. Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel überein — Fig. 93 — wie ABC, DEF, wo $\sphericalangle B = E$ ist, so läßt sich der für das Verhältnis der Inhalte gefundene Ausdruck umformen. Fällt man nämlich die Lote AK und DL, so ist $AK : DL = AB : DE$, somit $ABC : DEF = AB \cdot BC : DE \cdot EF$. In Worten:

Die Inhalte zweier Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

5. Ist außerdem noch $\sphericalangle A = D$, so sind die beiden Dreiecke ähnlich, daher $AB : DE = BC : EF$. Das Verhältnis der Inhalte wird demnach $ABC : DEF = BC^2 : EF^2$. In Worten:

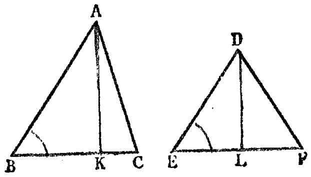


Fig. 93.

Die Inhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die zweiten Potenzen homologer Seiten.

6. Bemerkung. Die Sätze 4 und 5 finden Verwendung bei der Lösung von Aufgaben über Verwandlung und Teilung der Dreiecke.

§ 106. Die Berechnung von Inhalten.

1. Die Flächeneinheit ist dasjenige Quadrat, dessen Seiten eine Längeneinheit mißt. Den Inhalt einer Figur ermitteln, heißt angeben, wie oft die Flächeneinheit in ihr enthalten ist. Hierbei kann eine rationale oder irrationale Maßzahl gefunden werden.

2. Ist F der Inhalt eines Rechtecks mit der Grundseite g und der Höhe h, so verhält sich F zur Flächeneinheit wie $g \cdot h : 1 \cdot 1$; woraus $F = g \cdot h$ folgt. D. h.:

Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt zweier anstoßender Seiten (eigentlich: Produkt der Maßzahlen zweier usw.).

3. Der Inhalt eines Quadrats von der Seite

a ist gleich der zweiten Potenz der Seite a, gleich a^2.

4. Bemerkung. Das Produkt zweier Strecken kann hiernach immer als Inhalt eines Rechtecks, und die zweite Potenz einer Strecke immer als Inhalt eines Quadrats gedeutet werden. Darauf beruht die in § 80 gewählte Bezeichnungsweise.

5. Das Ergebnis der Nr. 2 in Verbindung mit § 105, 3 liefert die Sätze: a) Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundseite und Höhe. b) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundseite und Höhe.

6. Da jedes Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerfällt, so ist sein Inhalt gleich dem Produkt aus der Höhe und der halben Summe der Grundseiten.

7. Verbindet man im regulären n-Eck das Zentrum mit den Ecken, so erhält man n kongruente Dreiecke. Ist nun a die Seite des Vielecks, ϱ ihre Entfernung vom Zentrum, so ist der Inhalt des Polygons $F = \frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2}$.

8. Der Inhalt eines beliebigen Vielecks kann in der Weise gefunden werden, daß man es durch Diagonalen von einer Ecke aus in Dreiecke zerlegt, deren Inhalte man berechnet und addiert. Oder: Man ziehe (am zweckmäßigsten) die längste Diagonale und fälle von den übrigen Ecken Lote auf dieselbe. Dadurch zerlegt man die Figur in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze. Die Inhalte derselben werden ermittelt und addiert.

§ 107. Der Inhalt eines Dreiecks.

In diesem Paragraphen soll der Inhalt F eines Dreiecks gefunden werden, dessen Seiten die Längen a, b, c haben. Um diesen Zweck zu erreichen, ist es notwendig, die Höhe h — Fig. 61 — zu berechnen. In § 81, 1 wurde die Beziehung aufgestellt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ap$. Hieraus folgt $p = (a^2 + b^2 - c^2) : 2a$. Nun ist

$$h^2 = b^2 - p^2 = (b + p) \cdot (b - p)$$

$$= \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \cdot \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$= \frac{(a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (c + a - b) \cdot (c - a + b)}{4a^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung $a + b + c = 2s$, so ist $-a + b + c = 2(s - a)$, $a - b + c = 2(s - b)$, $a + b - c = 2(s - c)$. Mithin nimmt obiger Ausdruck folgende Form an:

$$h^2 = \frac{2s \cdot 2(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{a^2};$$

daher

$$ah = 2\sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

oder

$$\boldsymbol{F = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}}.$$

§ 108. Übungen.

1. Die Grundlinie eines Dreiecks ist 4,2 cm, die zugehörige Höhe 3,8 cm. Berechne den Inhalt des Dreiecks.

2. Der Umfang eines Quadrats beträgt 16,48 m. Wie groß ist der Inhalt?

3. Der Umfang eines Rechtecks ist 24,6 m. Eine Seite mißt 8,4 m. Bestimme den Inhalt.

4. Die Grundseiten eines Trapezes messen 6,4 cm und 3,8 cm; die Höhe ist gleich 4,2 cm. Berechne den Inhalt.

5. Teile im $\triangle ABC$ die Seite AB in drei gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte die Parallelen mit BC. Vergleiche die Inhalte der entstandenen Figuren miteinander.

6. Durch den Punkt E, der die Seite AB des $\triangle ABC$ im Verhältnis $m:n$ teilt, wird die Parallele zu BC gezogen. In welchem Verhältnis steht der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks zu dem Inhalt des auftretenden Trapezes?

7. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c$.

8. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist $\frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$

9. Welchen Inhalt hat ein reguläres Sechseck von der Seite 2,4 m?

10. Die Projektionen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse sind 5 cm und 20 cm. Berechne die Katheten, die Höhe und den Inhalt.

11. Der Inhalt eines Rhombus ist 42,84 qm. Die eine Diagonale mißt 3,57 m. Wie lang ist die andere?

12. In dem Viereck $ABCD$ wurden von den Ecken B und D die Lote auf die Diagonale AC gefällt. Die Lote messen 5,2 m und 6,4 m, die Diagonale 12,9 m. Ermittle den Inhalt des Vierecks.

13. Berechne den Inhalt des Dreiecks ABC aus $a = 13$ cm, $b = 14$ cm und $c = 15$ cm.

14. Die Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

15. Die Inhalte zweier regelmäßiger n-Ecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken.

16. Errichtet man auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als homologe Seiten ähnliche Figuren, so ist die über der Hypotenuse errichtete Figur gleich der Summe der beiden Figuren über den Katheten.

17. In jedem Dreieck ist $r = a \cdot b \cdot c : 4F$.

18. In jedem Dreieck ist

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}}; \quad \varrho_a = \sqrt{\frac{s\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s-a}}.$$

19. In jedem Dreieck ist $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = F^2$.

20. Wenn zwei inhaltsgleiche Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen, so sind auch die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten gleich.

21. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

22. Ein gegebenes Dreieck in ein zweites zu verwandeln, das einem dritten ähnlich ist.

23. Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Diagonalen sich unter dem $\sphericalangle \varepsilon$ schneiden.

24. Das gegebene Dreieck ABC durch Geraden parallel BC in fünf gleiche Teile zu teilen.

25. Ein Quadrat durch zwei auf einer Diagonale errichtete Lote in drei gleiche Teile zu teilen.

26. Ein reguläres Sechseck durch Parallelen mit einer Seite in drei gleiche Teile zu teilen.

27. Zwei ähnliche Vielecke sind gegeben. Es soll ein drittes diesen ähnliches konstruiert werden, das gleich der Summe bzw. der Differenz der beiden ist.

28. Sind a, b, c und d die vier Seiten eines Kreisvierecks und e eine Diagonale, so ist

$$e = \sqrt{\frac{(a\,d + b\,c)\cdot(a\,c + b\,d)}{a\,b + c\,d}}.$$

29. Sind a, b, c und d die Seiten eines Kreisvierecks und ist $a + b + c + d = 2s$, so ist dessen Inhalt

$$F = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}.$$

Anleitung. Man fälle in dem Viereck $ABCD$ von A die Höhe AE auf BC und von C die Höhe CF auf AD; dann ist, wenn AE mit h und BE mit p bezeichnet wird:

$ABCD = \frac{ab + cd}{2a} \cdot h$; $p = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2b}$; $h^2 = a^2 - p^2$,

und e gleich dem in Nr. 28 angegebenen Wert.

30. Fällt man von einem Punkt im Innern eines Dreiecks Lote auf die Seiten, so ist die Summe der drei Verhältnisse aus je einem Lot und der zu ihm parallelen Höhe gleich 1.

---

15. Kapitel.

Die Ausmessung des Kreises.

§ 109. Berechnung regelmäßiger Vielecke.

1. Aufgabe. Der Radius r und die Seite s_n des in den Kreis beschriebenen regulären n-Ecks sind gegeben. Man soll die Seite s_{2n} des einbeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl durch Rechnung ermitteln.

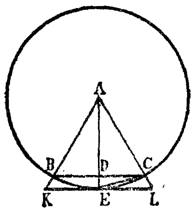


Fig. 94.

Lösung. Fig. 94. Ist BC die Seite des n-Ecks, $AE \perp BC$, so ist EC die Seite des $2\,n$-Ecks. Im $\triangle EAC$ ist nach § 81 $s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r \cdot AD$. Der Wert für AD ergibt sich aus dem $\triangle ADC$. Man findet

$$AD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}.$$

Somit ist

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

$$= r^2 \left[2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2}\right];$$

$$s_{2n} = r \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}}\,.$$

2. Zusatz. Die Seite des regelmäßigen Sechsecks ist $s_6 = r$. Trägt man diesen Wert in die soeben gefundene Formel ein, so erhält man die Seite des Zwölfecks, nämlich

$$s_{12} = r \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}}} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,.$$

Ebenso berechnet man s_{24}, s_{48} usw.

3. Aufgabe. Der Radius r und die Seite s_n des in den Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks sind gegeben. Man soll die Seite S_n des um den Kreis beschriebenen regulären n-Ecks ermitteln.

Lösung. Fig. 94. Ist BC die Seite s_n des einbeschriebenen n-Ecks, $AE \perp BC$, $KL \parallel BC$, so ist KL die Seite S_n des umbeschriebenen n-Ecks. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und AKL folgt $S_n : s_n = r : AD$. Daher $S_n = r \cdot s_n : AD$. Wie vorhin ist

$$AD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\,;$$

folglich

$$S_n = r \cdot s_n : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} = s_n : \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}\,.$$

4. Zusatz. Diese Formel liefert für $s_6 = r$ den Wert $S_6 = r : \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2r : \sqrt{3}$; für $s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ den Wert $S_{12} = 2r\,(2 - \sqrt{3})$ usw.

§ 110. Die Rektifikation des Kreises.

1. Die Aufgabe, einen Kreis zu rektifizieren, d. h. eine Strecke von der gleichen Länge wie die Peripherie eines Kreises zu finden, kann, wie Lindemann 1882 gezeigt hat, durch eine planimetrische Konstruktion nicht gelöst werden. Demnach erledigt man die Rektifikation annäherungsweise, und zwar sowohl durch Rechnung als auch durch Konstruktion.

a) Durch Rechnung:

2. Kreise sind ähnliche Figuren. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwei homologe Strecken. Daher ist das Verhältnis der Umfänge P und P' zweier Kreise gleich demjenigen ihrer Durchmesser d und d'. D. h. $P : P' = d : d'$ oder $P : d = P' : d'$. In Worten:

In allen Kreisen ist das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser unveränderlich.

Diese konstante Verhältniszahl wird mit π bezeichnet (π das griechische p, Peripherie).

3. Es ist einleuchtend, daß der Umfang des einbeschriebenen regulären n-Ecks kleiner und der Umfang des umbeschriebenen regulären n-Ecks größer als die Peripherie des Kreises ist. Der Fehler, den man begeht, wenn man den Umfang eines der beiden Vielecke als Peripherie des Kreises nimmt, wird um so kleiner, je größer die Seitenzahl des Polygons genommen wird: **Die Peripherie des Kreises ist die gemeinsame Grenze, der sich die Umfänge der ein- und umbeschriebenen Vielecke bei unbeschränkter Vermehrung der Seitenzahl nähern.**

Ausgehend vom regelmäßigen Sechseck lassen sich mittels des § 109 die Umfänge u und U der ein- bzw.

umbeschriebenen 12, 24, 48, 96, 192, 384 ... Ecke berechnen. Für $r = 1$ kommt

$u_6 = 6{,}00000$	$U_6 = 6{,}92820$
$u_{12} = 6{,}21163$	$U_{12} = 6{,}43078$
$u_{24} = 6{,}26526$	$U_{24} = 6{,}31932$
$u_{48} = 6{,}27870$	$U_{48} = 6{,}29218$
$u_{96} = 6{,}28206$	$U_{96} = 6{,}28542$
$u_{192} = 6{,}28291$	$U_{192} = 6{,}28357$
$u_{384} = 6{,}28311$	$U_{384} = 6{,}28333.$

4. Das in Nr. 3 dargelegte Verfahren führt den Namen Exhaustionsmethode. Es liefert das Resultat $\pi = 3{,}1416$. Weil nach Nr. 2 $P : d = \pi$ ist, so erhält man $P = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$. D. h.:

Der Umfang eines Kreises ist das π-fache des Durchmessers.

5. Der ägyptische Papyrus des Ahmes aus der Zeit 1700—2000 v. Chr. gibt $\pi = (16 : 9)^2 = 3{,}1604$ an. Archimedes (gest. 212 v. Chr.) zeigte, daß π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liege. Die Indier rechneten mit $\pi = 3927 : 1250 = 3{,}1416$. Im 16. Jahrhundert n. Chr. wurde von **Vieta** π auf 10 Dezimalstellen, von **Ludolf van Ceulen** auf 35 Dezimalstellen bestimmt; ihm zu Ehren wird π die Ludolfsche Zahl genannt. Ferner fand **Adriaan Anthoniszoon** für π den Wert 3,1415929. Später wurde π mit Hilfe der höheren Mathematik von **Vega** auf 140, von **Dahse** auf 200 und von **Richter** in Elbing auf 500 Dezimalstellen berechnet. Wie indessen schon oben bemerkt wurde, hat **Lindemann** bewiesen, daß π keine algebraische, sondern eine **transzendente Zahl** ist. Auf 7 Dezimalen genau ist $\pi = 3{,}1415927$; für die meisten Fälle

der Praxis ist jedoch $\pi = 3\frac{1}{7}$ oder auch $\pi = 3{,}1416$ hinreichend genau.

b) Durch **Konstruktion**:

6. **Kochansky** (1685) hat folgende einfache Lösung gegeben:

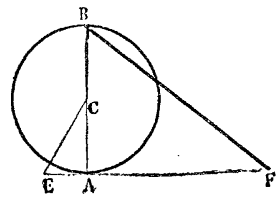


Fig. 95.

Fig. 95. Ziehe in dem Endpunkt A des Durchmessers AB die Tangente an den Kreis C. Sodann lege $\sphericalangle ECA = 30^0$ an; trage von E aus auf der Tangente $EF = 3r$ ab, so ist BF mit großer Annäherung gleich dem halben Umfang des Kreises; denn eine kurze Rechnung ergibt für BF den Wert $r \cdot \sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}1415 r$.

§ 111. Die Quadratur des Kreises.

1. Unter der **Quadratur** des Kreises (des Zirkels) versteht man die Aufgabe, die Fläche des Kreises in eine geradlinige Figur zu verwandeln, etwa in ein Quadrat. Auch diese Aufgabe ist wie die Rektifikation mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.

2. Um den Inhalt eines Kreises vom Radius r annäherungsweise zu erhalten, beschreibt man um denselben ein regelmäßiges Vieleck. Durch unbeschränkte Vermehrung der Seitenzahl erhält man schließlich ein Polygon, dessen Umfang und Inhalt der Peripherie und dem Inhalt des Kreises äußerst nahe kommen.

Ersetzt man daher in der § 106, 7 gefundenen Formel $F = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot \varrho$ den Umfang na durch $2\pi\varrho$, so erhält man als Inhalt des Kreises den Ausdruck $F = \pi \cdot \varrho^2$. D. h.:

Der Inhalt des Kreises ist gleich dem Produkt aus der Zahl π und dem Quadrat des Radius.

3. Der Inhalt eines zwischen zwei konzentrischen Kreisen von den Radien R und r gelegenen Ringes ist $\pi(R^2 - r^2)$. — Konstruiere einen Kreis, der mit dem Ring gleichen Inhalt hat.

§ 112. Berechnung der Kreisteile.

1. In einem Kreise vom Radius r sei die Länge eines Bogens mit b, sein zugehöriger Zentriwinkel mit α, der Inhalt des Sektors mit S bezeichnet. Da sich die Bögen eines Kreises wie die zugehörigen Zentriwinkel verhalten, so folgt die Proportion $b : \pi r = \alpha : 180$. Hieraus $b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$.

Die Inhalte der Sektoren eines Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Bögen oder Zentriwinkel. Somit gilt die Proportion $S : \pi r^2 = b : 2\pi r = \alpha : 360$. Daraus folgt

$$S = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}.$$

2. Die Fläche eines Segments ist gleich dem Unterschied des zugehörigen Sektors und des durch die Sehne abgeschnittenen Dreiecks.

§ 113. Übungen.

Bemerkung $\pi = 3{,}1416$.

1. Der Radius eines Kreises ist $r = 6{,}2$ m. Wie groß ist der Umfang, der Inhalt?

2. Der Radius eines Kreises ist $r = 0,5$ m, ein Zentriwinkel mißt $\alpha = 32^\circ$. Wie groß ist der zugehörige Bogen, Sektor?

3. Der Radius eines Kreises ist $r = 8,6$ m. Wie groß ist die Seite des dem Kreise inhaltsgleichen Quadrats?

4. Der Bogen eines Sektors ist gleich dem Radius, wie groß ist der Zentriwinkel?

5. Der Inhalt eines Sektors ist gleich dem Quadrat des Radius, wie groß ist der Zentriwinkel?

6. Welche Umdrehungsgeschwindigkeit in der Sekunde hat ein Ort am Äquator? Der Radius der Erde beträgt 6370 km.

7. Zwei gleich große Kreise schneiden sich so, daß jeder durch das Zentrum des anderen geht. Wie groß ist die gemeinsame Fläche?

8. Drei gleich große Kreise berühren sich gegenseitig. Wie groß ist die zwischen den Umfängen liegende Fläche?

9. In einen Kreis vom Radius r ist ein Quadrat beschrieben; über einer Seite wurde der Halbkreis nach außen gelegt. Wie groß ist die entstandene mondförmige Figur?

10. Einen Kreis zu konstruieren, dessen Umfang gleich ist der Summe oder Differenz der Umfänge zweier Kreise.

11. Einen Kreis zu konstruieren, dessen Inhalt gleich ist der Summe oder Differenz der Inhalte zweier Kreise.

12. Eine gegebene Kreisfläche durch den konzentrischen Kreis zu halbieren.

13. Einen gegebenen Sektor durch konzentrische Kreisbögen zu trisezieren.

14. Um einen Kreis einen Ring zu konstruieren, dessen Inhalt einem gegebenen Kreis gleich ist.

15. Ein Kreis vom Radius $r = 20$ cm ist von einem Ring umgeben, dessen Inhalt 706,86 qcm beträgt. Wie breit ist der Ring?

16. Die Kurve einer Bahnlinie ist ein Kreisbogen AB von 360 m Länge und 500 m Radius. Welchen Winkel bilden die Tangenten in A und B miteinander?

17. Ein Kreis hat den Inhalt $F = 24$ qm. Man berechne die Länge eines Kreisbogens, der zu einem Zentriwinkel von $48^\circ 30'$ gehört.

18. Der Inhalt eines Sektors ist $S = 15$ qm, sein Zentriwinkel mißt $\alpha = 30^\circ$. Wie groß ist der Radius desjenigen Kreises, der mit dem Sektor gleichen Umfang hat?

19. Wie groß ist der Inhalt und der Umfang eines Kreises, der in einen Sektorquadranten von $r = 5$ m Radius beschrieben werden kann?

20. Eine helle halbkreisförmige Glasscheibe hat den Mittelpunkt C und den Durchmesser $AB = 2r$. Aus derselben werden die Halbkreise über AC und BC sowie der Kreis ausgeschnitten, der die drei Halbkreise berührt und die Öffnungen durch farbiges Glas ersetzt. In welchem Verhältnis steht die helle Fläche zur farbigen?

21. Errichtet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nach derselben Seite Halbkreise, so ist die Summe der beiden mondförmigen Figuren gleich dem gegebenen Dreieck (Lunulae Hippocratis, 450 v. Chr.).

22. Zieht man in einem Kreise zwei zueinander senkrechte sich schneidende Sehnen und beschreibt man über den vier Abschnitten als Durchmesser Kreise, so ist die Summe der vier Kreise gleich dem Inhalt des gegebenen Kreises (§ 72, 2).

23. $ABCD$ ist ein Rechteck, in dem $BC = 2\,AB$ ist, F und E sind die Mitten der BC und AD; G ist der Schnitt von AF und BE; H ist der Schnitt der EC und DF. Um F wird ein Kreisbogen durch A, D gelegt; ebenso um E durch B, C; um G durch A, B; um H durch C, D. Wie groß ist das entstandene Oval, wenn $BC = 2\,a$ ist?

24. In dem Kreise O sind die beiden senkrechten Durchmesser AB und DC sowie die Sekanten AD und BD gezogen. Um B beschreibt man einen Bogen durch A, der BD in E schneidet, ebenso aus A mit Radius AB, welcher AD in F trifft. Das Oval vervollständigt man durch einen Bogen aus D mit DE. Wie groß ist der Inhalt der Eilinie?

25. Berechne die Seite des einem Kreis vom Radius r einbeschriebenen regulären 8, 16, 32, 12, 24, 48, 96, 10, 20, 40, 80-Ecks.

26. Die Seite des einem Kreis vom Radius r einbeschriebenen regulären 5-Ecks ist $\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

III. Abschnitt.

Die geometrische Aufgabe.

16. Kapitel.

Wesen und Behandlung der Aufgabe.

§ 114. Einführung.

1. Die geometrische Konstruktionsaufgabe verlangt eine Figur herzustellen, die gegebenen Bedingungen genügt. Dadurch wird zugleich aus den gegebenen Bestimmungsstücken, die voneinander unabhängig sein müssen, die Größe oder Lage anderer Stücke abgeleitet. Zur Konstruktion darf nur die Gerade und der Kreis angewendet werden, woher es kommt, daß scheinbar einfache Aufgaben nicht gelöst werden können, wie z. B. die Dreiteilung des Winkels.

2. Die Aufgabe ist **bestimmt**, wenn ihre Auflösung nur ein oder eine endliche Anzahl von Resultaten ergibt; **unbestimmt**, wenn die Zahl der Resultate unendlich ist; **überbestimmt**, wenn mehr Bestimmungsstücke gegeben sind, als die Konstruktion verlangt; **unmöglich**, wenn die gegebenen Bedingungen den Eigenschaften der verlangten Figur widersprechen.

§ 115. Teile der Auflösung.

Die vollständige Lösung einer Aufgabe gliedert sich in vier Teile: Analysis, Konstruktion, Beweis, Determination.

1. Analysis. Man zeichnet eine Figur von derselben Art wie die gesuchte und stellt in ihr die Stücke dar, die den gegebenen entsprechen. Höhen, Medianen, Transversalen werden gezogen; Summen und Differenzen durch Verlängerung bzw. Abtragen hergestellt; die Figur durch Verbindung freier Punkte ergänzt, oder durch Hilfslinien zerlegt, so daß einfachere Figuren, in der Regel solche bekannter Lehrsätze und Aufgaben auftreten. Hierauf untersucht man, in welcher Beziehung die gegebenen Stücke unter sich und zu anderen Stücken der Figur stehen. Die Untersuchung wird so weit fortgeführt, bis die Abhängigkeiten zwischen allen erforderlichen Elementen aufgedeckt sind; dann aber hat das Verfahren auf eine oder mehrere Aufgaben geführt, die gelöst werden können. Um irreführende Zufälligkeiten zu vermeiden, empfiehlt es sich, zwei Figuren zu entwerfen, die in der Lage und Größe der Stücke beträchtlich voneinander abweichen; ferner sind alle Besonderheiten zu meiden, z. B. dürfen nicht zwei parallele Geraden angenommen werden, wenn in der Aufgabe von zwei Geraden die Rede ist. Beim Beginn der Analysis hat man auch in Kürze zu prüfen, ob die vorliegende Aufgabe bestimmt ist.

2. Die Konstruktion folgt der Analysis Schritt für Schritt, indem sie die einzelnen Elemente der Figur in der Weise erzeugt, wie sie die Analysis als voneinander abhängig festgestellt hat. Während jedoch die

Analysis nicht auf die gegebene Größe der Bestimmungsstücke Rücksicht nimmt, muß die Konstruktion davon ausgehen. Auch sei darauf hingewiesen, daß jede Konstruktion so weit wie irgend tunlich in einer einzigen Figur zu leisten ist. Je geringer die Zahl der Konstruktionslinien und der erforderlichen Lehrsätze ist, um so eleganter ist die Auflösung. (Prinzip der Ökonomie des Denkens.)

3. Der Beweis tut dar, daß die durch die Konstruktion hergestellte Figur den Bedingungen der Aufgabe genügt; er geht somit den umgekehrten Gang der Analysis. Hierbei zeigt sich, daß der Beweis oft die Umkehrungen derjenigen Sätze notwendig hat, welche die Analysis zu ihrer Entwicklung bedurfte.

4. Die Determination untersucht die Möglichkeit und Bestimmtheit der Aufgabe; wobei auch die besonderen Fälle und die Einschränkung zu berücksichtigen sind. Eine vollständige Determination kann zuweilen trigonometrische Kenntnisse erfordern.

§ 116. Methoden der Lösung.

Diese sind die Methode der geometrischen Örter, der Parallelverschiebung, der Umklappung, der Drehung und der Rechnung. Andere, in der Regel einfachere Hilfsmittel, wie sie die Kongruenz, die Symmetrie, die Ähnlichkeit der Figuren und manche Lehrsätze bieten, sind in den früheren Paragraphen angeführt worden und finden deswegen hier keine Berücksichtigung mehr.

§ 117. Die Methode der Örter.

Dieses Verfahren setzt eine größere Zahl von Örtern voraus; es ist daher vor allem notwendig,

solche, soweit es nicht schon früher geschehen ist, anzuführen.

1. Der geometrische Ort für (D. g. O. f.) den einen Endpunkt einer konstanten Strecke, die immer in gleicher Weise eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet, ist eine Parallele zur Geraden.

2. D. g. O. f. das Zentrum X aller Kreise vom Radius r, welche aus einer gegebenen Geraden immer in gleicher Weise eine Strecke von vorgeschriebener Länge ausschneiden, ist eine Parallele zur Geraden. — Ist AB eine solche Strecke, so läßt sich das $\triangle ABX$ in irgend einer Lage zeichnen.

3. D. g. O. f. den Mittelpunkt X aller Kreise vom Radius r, die den gegebenen Kreis O immer in gleicher Weise nach einer Sehne von gegebener Länge schneiden, ist ein mit dem gegebenen Kreise O konzentrischer. — Ist AB eine solche Sehne, so läßt sich das Viereck $OAXB$ in irgend einer Lage konstruieren.

4. D. g. O. f. den Punkt X, von dem aus man Tangenten von gegebener Länge an den gegebenen Kreis O legen kann, ist ein konzentrischer Kreis. — Ist XA eine Tangente, so läßt sich $\triangle XAO$ in irgend einer Lage herstellen.

5. D. g. O. f. den Punkt X, von dem aus der gegebene Kreis O unter dem gegebenen Winkel α erscheint, ist ein konzentrischer Kreis. — Ist XA eine Tangente, so ist $\triangle OAX$ bestimmt.

6. D. g. O. f. den Punkt X, von welchem aus zwei gegebene Kreise O und Q unter gleichen Winkeln erscheinen, ist ein Kreis. — Zieht man an den Kreis O die Tangente XA, an den Kreis Q die Tangente XB, so ist $\triangle OAX \sim QBX$, somit $XO : XQ = OA : QB$. Das Weitere nach § 90.

7. Zieht man in dem Kreise O durch den Peripheriepunkt A alle Sehnen, so ist d. g. O. f. deren Mitte der Kreis über OA als Durchmesser.

8. Zieht man durch den Punkt A an den Kreis O alle Sekanten, so ist d. g. O. f. den Mittelpunkt X der Sekanten ein Kreis. — Ist AB eine Sekante, und zieht man OB, wie

auch durch X die Parallele zu OB, welche OA in Q schneidet, so ist Q die Mitte der AO und $QX = \frac{1}{2} OB$.

9. Legt man um das $\triangle ABC$ den Umkreis, halbiert man ferner den Bogen BC in E und beschreibt um E mit EB den Kreis, so ist dieser d. g. O. f. das Zentrum X aller Inkreise derjenigen Dreiecke, die auf BC stehen und ihre Spitze auf dem Bogen BAC haben. — Es ist nämlich $\triangle BEX$ gleichschenklig, da $\sphericalangle EBX = BXE = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ist.

10. D. g. O. f. den Punkt X, dessen Summe der Entfernungen von zwei sich schneidenden Geraden g und g' die gegebene Länge s hat, besteht aus den Seiten eines Rechtecks. — Ziehe zu g die Parallele h im Abstand s, welche g' in A trifft, und halbiere die Winkel bei A. Die Medianen schneiden g in B und C, so sind AB und AC zwei Seiten des Rechtecks. — Welche Bedeutung haben die Verlängerungen der Rechteckseiten?

11. Zieht man von dem gegebenen Punkte A alle Strecken nach der Geraden L, so ist d. g. O. f. den Punkt X, der die Strecken in gleicher Weise im Verhältnis $m:n$ teilt, eine Parallele zu L.

12. Zieht man durch den Punkt A alle Sekanten an den gegebenen Kreis O und teilt sie in gleicher Weise im Verhältnis $m:n$, so ist d. g. O. f. den Teilungspunkt X ein Kreis. — Dieser wird analog dem in Nr. 8 gefunden. — Der Punkt A kann auch innerhalb des Kreises liegen.

13. D. g. O. des Punktes X, der zu den Punkten A, B so liegt, daß $AX^2 - BX^2 = d^2$ wird, ist eine Gerade. — Bestimmt man nämlich auf AB den Punkt C so, daß $AC^2 - BC^2 = d^2$ ist, und errichtet man in C das Lot auf AB, so ist dieses der Ort.

14. D. g. O. f. den Punkt X, von dem aus die Tangenten an die gegebenen Kreise O, Q mit den Radien r, ϱ einander gleich sind, ist eine Gerade senkrecht zu OQ. — Denn es ist $XO^2 - XQ^2 = r^2 - \varrho^2$. — Beschreibt man um X mit der Länge der betreffenden Tangente den Kreis, so schneidet dieser die beiden Kreise rechtwinklig. Daher:

15. D. g. O. f. den Mittelpunkt aller Kreise, die zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneiden, ist eine Gerade.

16. D. g. O. f. das Zentrum X aller Kreise, die durch den gegebenen Punkt A gehen und den gegebenen Kreis O vom Radius r halbieren, ist eine Gerade. — Denn es ist $AX^2 - XO^2 = r^2$.

17. D. g. O. f. den Mittelpunkt X aller Kreise, die zwei gegebene Kreise O und Q mit den Radien r und ϱ halbieren, ist eine Gerade. — Denn man hat $XO^2 - XQ^2 = \varrho^2 - r^2$.

18. D. g. O. f. das Zentrum X aller Kreise, die den gegebenen Kreis O vom Radius r rechtwinklig schneiden und den gegebenen Kreis Q vom Radius ϱ halbieren, ist eine Gerade. — Es ist $XO^2 - XQ^2 = r^2 + \varrho^2$.

19. D. g. O. f. den Punkt X von solcher Lage zu zwei gegebenen Punkten A, B, daß $AX^2 + BX^2 = s^2$ werde, ist ein Kreis. — Ist nämlich $XA = x$, $XB = y$, $AB = c$, ferner C die Mitte von AB, $CX = z$, so besteht die Beziehung $c^2 + 4z^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2s^2$; hieraus $z^2 = {}^1/_4\,(2s^2 - c^2)$. Demnach ist der Ort der um C mit ${}^1/_2\sqrt{2s^2 - c^2}$ beschriebene Kreis.

20. D. g. O. f. das Zentrum X aller Kreise, die von dem gegebenen Kreise O vom Radius r rechtwinklig geschnitten und dem gegebenen Kreise Q (Radius ϱ) halbiert werden, ist ein Kreis. — Denn $XO^2 + XQ^2 = r + \varrho^2$.

21. D. g. O. f. den Mittelpunkt X aller Kreise, welche durch den gegebenen Punkt A gehen und von dem gegebenen Kreis O (Radius r) halbiert werden, ist ein Kreis. — Denn $XA^2 + XO^2 = r^2$.

22. D. g. O. f. das Zentrum aller Kreise, die den gegebenen Kreis O vom Radius r halbieren und von dem gegebenen Kreis Q (Radius ϱ) halbiert werden, ist ein Kreis. — Denn $XO^2 + XQ^2 = \varrho^2 - r^2$.

23. Zieht man von dem Punkte A nach der Geraden L irgend eine Strecke AB und bestimmt auf ihr den Punkt X so, daß $AX \cdot AB = a^2$ wird, so beschreibt der Punkt X einen Kreis, wenn sich AB um A dreht.

24. Zieht man durch den Peripheriepunkt A eines Kreises

irgend eine Sehne (Sekante) AB und bestimmt auf ihr den Punkt X so, daß $AX \cdot AB = a^2$ wird, so beschreibt X eine Gerade, wenn sich AB um A dreht.

25. Zieht man durch den Punkt A nach dem Kreise O eine Sekante AB und bestimmt auf ihr den Punkt X so, daß $AX \cdot AB = a^2$ wird, so beschreibt X einen Kreis, wenn sich AB um A dreht. (A ist ein Ähnlichkeitspunkt beider Kreise.)

§ 118. Anwendung.

Um eine geometrische Konstruktionsaufgabe mittels der Methode der Örter zu lösen, geht man von zwei oder mehreren der Lage nach vorhandenen Elementen (Punkten, Linien) aus und bestimmt für jeden unbekannten Punkt zwei Ortslinien, indem man jede der beiden Bedingungen, welche der Punkt erfüllen soll, für sich betrachtet. Jede Bedingung liefert einen Ort und der gesuchte Punkt liegt da, wo sich die beiden Örter schneiden.

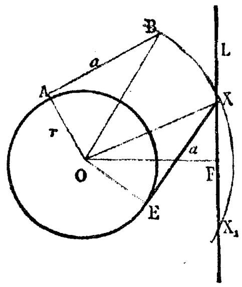


Fig. 96.

Beispiel. Auf der gegebenen Geraden L den Punkt X zu finden, von dem die an den gegebenen Kreis O gezogene Tangente die Länge a erreicht.

Analysis. Fig. 96. Es sei X der gesuchte Punkt, so daß die Tangente $XE = a$ wird. Wie aus dem Text der Aufgabe hervorgeht, hat der Punkt X zwei Bedingungen zu gehorchen: 1) er muß auf L liegen, 2) muß er eine solche Lage haben, daß die von ihm an den Kreis O gelegte Tangente die Länge a erreicht. Die beiden Ortslinien für X sind somit 1) die Linie L,

2) der in § 117, 4 angeführte konzentrische Kreis. Die Schnittpunkte beider Örter genügen der Aufgabe.

Konstruktion. Ziehe den Radius OA, errichte in A auf OA das Lot $AB = a$ und verbinde B mit O. Beschreibe um O mit OB den Kreis, der die L in X schneidet.

Beweis. Ziehe von X an den Kreis die Tangente XE und verbinde O mit E und X. Da nun $OX = OB$, $OE = OA$, $\sphericalangle E = A = 1R$ ist, so ist $\triangle XOE \cong BOA$, woraus $EX = AB$ folgt. Es ist jedoch $AB = a$, daher auch $XE = a$ und Tangente. Auch liegt X auf L. Mithin genügt X allen Anforderungen der Aufgabe.

Determination. Fälle $OF \perp L$. Mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes ergibt sich $OB = \sqrt{a^2 + r^2}$; wenn nun $\sqrt{a^2 + r^2} \gtreqless OF$ ist, so hat der konzentrische Kreis mit L $\left.\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right\}$ Punkte gemeinsam, d. h. es gibt 2, 1, 0 Punkte, die der Aufgabe entsprechen.

§ 119. Übungen.

Bezeichnung: $\odot$ aus L_s, K_s, K_d, P_t, K_{90} heißt, einen Kreis zu beschreiben, der aus L eine Strecke $= s$, aus dem Kreis K eine Sehne $= s$ ausschneidet, der den K halbiert, der so liegt, daß die vom Punkte P an ihn gelegte Tangente $= t$ werde, der den Kreis K rechtwinklig schneidet.

1. Führe die geometrischen Örter auf, die in den Abschnitten I und II enthalten sind.

2. Dem $\triangle ABC$ das gleichschenklige $\triangle XYZ$ einzubeschreiben, so daß die Basis $XY \parallel BC$ geht und die Länge a erhält.

3. $\odot$ aus r, A, L_s.

4. $\odot$ aus r, L_s, P_t.

5. $\odot$ aus r, K, K'_s.

6. $\odot$ aus L, K_d, r.

7. Den Punkt X zu finden, so daß die von ihm an die Kreise O und Q gelegten Tangenten die Längen a und b haben.

8. Den Punkt X zu finden, von dem aus die Kreise O und Q unter den Winkeln α und β erscheinen.

9. Den Punkt X zu finden, von dem aus drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen.

10. $\triangle$ aus r, a, t_b.

11. $\triangle$ aus a, α, t_b.

12. Durch den Punkt A eine den Kreis O in X und Y schneidende Sekante so zu ziehen, daß $AX = XY$ wird.

13. Desgleichen, daß $AX : AY = m : n$ wird.

14. Rechtwinkliges Dreieck aus a, ϱ.

15. $\triangle$ aus p, q, $b : c = m : n$.

16. In einem Viereck einen Punkt zu finden, der von den Seiten a und b das Entfernungsverhältnis $m : n$ und von den Seiten c und d die Summe der Entfernungen s hat.

17. Auf dem Umfang des Kreises O ist der Punkt A gegeben. Man soll durch A eine Gerade ziehen, welche den Kreis in X und die gegebene Linie L in Y so schneidet, daß $AX = XY$ wird.

18. Desgleichen, daß $AX : AY = m : n$ wird.

19. Durch den innerhalb des gegebenen Kreises O gelegenen Punkt A die Sehne XAY so zu ziehen, daß $AX : AY = m : n$ wird.

20. Rechtwinkliges Dreieck aus a, $b^2 - c^2 = d^2$.

21. $\triangle$ aus a, t_a, $b^2 - c^2 = d^2$.

22. $\triangle$ aus a, $b^2 - c^2 = d^2$, F (Inhalt).

23. $\triangle$ aus a, α, $b^2 - c^2 = d^2$.

24. Den Punkt X zu finden, so daß die von ihm an drei gegebene Kreise gezogenen Tangenten einander gleich werden.

25. $\odot$ aus K_{90}, K'_{90}, K''_{90}.

26. $\odot$ aus A, B, K_d.

27. $\odot$ aus K_d, K'_d, K''_d.
28. $\odot$ aus K_{90}, K'_{90}, K''_d.
29. $\odot$ aus K_{90}, K'_d, K''_d.
30. $\triangle$ aus a, α, $b^2 + c^2 = s^2$.
31. $\triangle$ aus a, h_a, $b^2 + c^2 = s^2$.
32. Einen Kreis zu konstruieren, der von zwei gegebenen Kreisen rechtwinklig geschnitten und von einem dritten gegebenen Kreis halbiert wird.
33. $\odot$ aus A und B und der von einem gegebenen Kreis halbiert wird.
34. $\odot$ aus K_d, K'_d und der von K'' halbiert wird.
35. Durch den Punkt A eine Gerade zu ziehen, die den Kreis O in Y, die Gerade L in X so schneidet, daß $AX \cdot AY = a^2$ wird.
36. Durch den Schnittpunkt A zweier Kreise die Sekante XAY so zu legen, daß $AX \cdot AY = a^2$ wird.
37. Durch den Punkt A eine Gerade zu ziehen, welche den Kreis O in X, den Kreis Q in Y so schneidet, daß $AX \cdot AY = a^2$ wird.
38. Gegeben sind die festliegenden Strecken AB und CD und die Gerade L. Auf L den Punkt X zu finden, so daß $\triangle ABX = CDX$ wird.
39. In dem $\triangle ABC$ den Punkt X zu finden, so daß $\triangle BCX : CAX : ABX = m : n : p$ sich verhält.
40. Auf der Geraden L liegen die Strecken AB, BC und CD hintereinander. Man soll den Punkt X finden, so daß von ihm aus die drei Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen.
41. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.
42. Ein rechtwinkliges Dreieck von gegebener Höhe zu konstruieren, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen sollen, wovon zwei auf der Hypotenuse liegen.
43. In einen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Katheten durch zwei gegebene Punkte gehen.

§ 120. Die Methode der Parallelverschiebung.

Das Wesen dieser Methode besteht darin, daß man einzelne Teile der Gesamtfigur, wie Strecken, Linien, Kreise, Linienzüge usw., parallel einer Geraden um eine bestimmte Strecke verschiebt. Der Zweck einer solchen Verschiebung ist die Auffindung eines wichtigen Punktes, das Zusammenrücken gegebener Strecken zu einer Figur, welche sich konstruieren läßt, Zerlegung einer Figur in Teile, die sich einzeln herstellen lassen, Übertragung von Verhältnissen.

1. Beispiel. $\triangle$ aus t_b, t_c, h_a.

Analysis. Es ist — Fig. 97 — ABC ein Dreieck, in dem $BD = t_b$, $CE = t_c$, $AF = h_a$ sei. Ver-

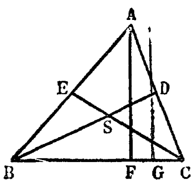


Fig. 97.

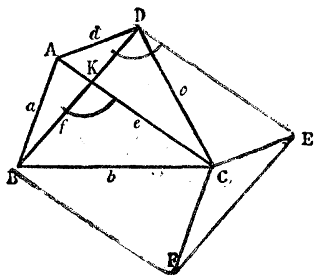


Fig. 98.

schiebt man AF längs BC, bis sie durch D geht, wobei $DG = \frac{1}{2} h_a$ wird, so läßt sich das rechtwinklige $\triangle BDG$ zeichnen aus $BD = t_b$, $GD = \frac{1}{2} h_a$ und $\sphericalangle BGD = 1R$. Der Punkt S auf BD teilt diese Strecke im Verhältnis $2:1$. Die beiden Örter für den Punkt C sind a) die Linie BG, b) der um S mit $\frac{2}{3} t_c$ beschriebene Kreis. Die Punkte C und D bestimmen die Lage von A, da $DA = CD$ sein muß.

2. Beispiel. Viereck aus a, c, e, f, $\sphericalangle ef$.

Analysis. In dem Viereck $ABCD$, Fig. 98, sei $AB = a$, $CD = c$, $AC = e$, $BD = f$, $\sphericalangle BKC = \sphericalangle ef$. Verschiebe $\triangle ADB$ parallel AC und um diese Strecke. Hierdurch gelangt D nach E, A nach C, B nach F und es ist $CE \# AD$, $CF \# AB$, $EF \# DB$, $\sphericalangle BDE = BKC$. Das Parallelogramm $BDEF$ läßt sich nun herstellen aus $BD = f$, $DE = e$, $\sphericalangle BDE = \sphericalangle ef$. Der Punkt C liegt auf dem um F mit a und auf dem um D mit c beschriebenen Kreise. Da $CA \# ED$ ist, so läßt sich A von C aus auffinden.

3. Beispiel. Zwischen zwei gegebene Kreislinien die Strecke $XY = a$ und parallel zur Zentrale zu legen.

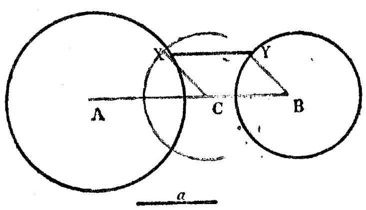


Fig. 99.

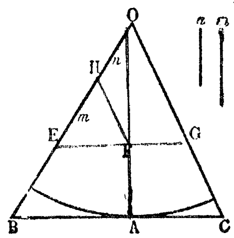


Fig. 100.

Analysis. In Fig. 99 seien A, B die Zentren der gegebenen Kreise, $XY = a$ und $\parallel AB$. Die Linie XY läßt sich ziehen, wenn der Punkt X gefunden ist. Verschiebt man aber den Kreis B längs BA um a bis C, so muß sein Umfang durch X gehen. In dieser neuen Lage läßt sich der Kreis zeichnen, da $BC = a$ sein muß.

Konstruktion. Mache $BC = a$, beschreibe um C mit dem Radius des Kreises B einen Bogen, der den Kreis A in X schneidet; ziehe $XY \parallel AB$.

4. Beispiel. An den Bogen des Sektors O die Tangente zu legen, so daß ihre von dem Berührungspunkte einerseits und den verlängerten Radien andererseits begrenzten Abschnitte sich wie $m:n$ verhalten.

Analysis. In Fig. 100 entspreche BC den Forderungen. Ziehe OA, welche Linie auf BC senkrecht stehen muß. Bringt man jetzt BC durch Parallelverschiebung in die Lage EG, so verhält sich auch $EF:FG = m:n$; wenn ferner $FH \parallel CO$ ist, so erhält man $EH:HO = m:n$. Die Verschiebung der BC kann immer so weit vorgenommen werden, daß $EH = m$ und $HO = n$ wird. Die beiden Örter für F sind alsdann a) der Halbkreis über EO als Durchmesser und b) die Parallele durch H zu OC. Die Gerade OF bestimmt auf dem Bogen den Punkt A und die gesuchte Linie BC ist senkrecht in A auf OA.

Konstruktion. Mache $OH = n$, $HE = m$; schlage über OE als Durchmesser den Halbkreis, der die durch H zu OC gezogene Parallele in F schneidet. Die verlängerte OF trifft den Bogen in A; errichte in A auf OA das Lot BC.

§ 121. Übungen.

1. $\triangle$ aus a, c, t_b.
2. $\triangle$ aus t_a, h_b, h_c.
3. $\triangle$ aus t_a, h_a, α.
4. $\triangle$ aus t_a, t_b, t_c.
5. $\triangle$ aus t_a, α, $b+c$.
6. Gleichschenkliges Dreieck aus h_b, ϱ.
7. Trapez aus b, d, e, f.
8. Trapez aus b, d, e, $\sphericalangle ef$.
9. Trapez aus b, c, d, $\sphericalangle ef$.
10. Viereck aus e, f, β, δ, $\sphericalangle ef$.
11. Viereck aus a, b, c, d, $\sphericalangle ac$.

12. Viereck aus den vier Seiten und der Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenseiten.

13. Durch den einen Schnittpunkt zweier sich schneidender Kreise eine Sekante zu ziehen, so daß die Summe beider Sehnen $= s$ werde.

14. Ein Rechteck zu konstruieren, von dem eine Seite gegeben ist, und dessen vier Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

15. In einem Kreise ist ein Durchmesser gezogen. Auf dem einen Halbkreis liegen die Punkte A, B. Auf dem anderen den Punkt X so zu bestimmen, daß AX und BX aus dem Durchmesser ein Stück $= a$ ausschneiden.

16. In dem $\triangle ABC$ eine die AB in X, die AC in Y schneidende Linie XY so zu ziehen, daß $XY = a$ und $BX : CY = m : n$ werde.

17. Desgleichen, daß $BX = XY = YC$ werde.

18. Gegeben sind die Strahlen AB und CD mit den Endpunkten A und C. Man sucht zwei sich berührende Kreisbögen von gleichen Radien, wovon der eine AB in A, der andere CD in C tangiert.

19. In dem $\triangle ABC$ eine die AB in X, die AC in Y schneidende Linie $XY \parallel BC$ so zu ziehen, daß $BX : XY = XY : CY$ wird.

20. Desgleichen, daß $AX : XY = XY : CY$ wird.

21. Desgleichen, daß $AX : XY = XY : BX$ wird.

22. Durch den Punkt A eine Linie so zu ziehen, daß die beiden Abschnitte, welche dieselbe zwischen einen Dreistrahl legt, sich wie $m : n$ verhalten.

23. Einen Dreistrahl durch eine Gerade so zu schneiden, daß die beiden Abschnitte $= a$ und b werden.

24. $\odot$ aus A auf L, K.

25. $\odot$ aus A auf K, K'.

26. $\odot$ aus L, L', K.

27. $\odot$ aus L, K, K'.

28. $\odot$ aus K, K', K''.

§ 122. Die Methode der Umklappung.

Die Methode der Umklappung leitet sich aus der axialen Symmetrie ab. Will man sie zur Lösung von Aufgaben verwenden, so klappt man die ganze oder einen Teil der zur Analysis notwendigen Figur um eine Gerade um. Letztere kann entweder schon vorhanden sein, oder sie muß erst eingeführt werden. Am häufigsten benutzt man dazu eine Winkelhalbierende oder eine Senkrechte. Der Zweck dieses Verfahrens ist aber, gegebene Stücke zusammenzurücken, gleiche Elemente zur Deckung zu bringen, Punkte durch symmetrische zu ersetzen, Summen bzw. Differenzen von Strecken und Winkeln darzustellen.

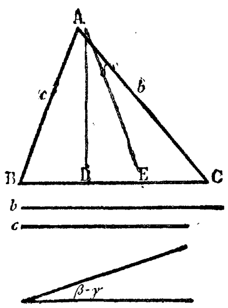


Fig. 101.

1. Beispiel. $\triangle$ aus b, c, $\beta - \gamma$.

Analysis. In Fig. 101 ist ABC ein Dreieck, in welchem $AC = b$, $AB = c$, $\sphericalangle B - C = \beta - \gamma$ sei. Um die Differenz $\sphericalangle B - C$ einzuführen, zieht man $AD \perp BC$ und klappt $\triangle ABD$ um AD in die Lage AED um. Hierdurch wird $\sphericalangle AEB = \beta$. Aber $\sphericalangle AEB = \delta + \gamma$, folglich ist $\sphericalangle \delta = \beta - \gamma$. Das $\triangle AEC$ ist demnach bestimmt aus $AC = b$, $AE = c$, $\sphericalangle \delta = \beta - \gamma$. Der Punkt D liegt auf CE und auf dem Lote von A auf CE. Der Punkt B liegt auf CE und auf einem Kreise um D mit DE.

Bemerkung. Zu einer anderen Lösung gelangt man, wenn das $\triangle ABC$ um das Mittellot der BC umgewendet wird.

2. Beispiel. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, von welchem zwei Gegenseiten und das Verhältnis der beiden anderen gegeben sind.

Analysis. In Fig. 102 sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, in dem $AB=a$, $CD=c$, $BC:AD=m:n$ gegeben ist. Klappt man $\triangle ABC$ um das Mittellot der AC um, wodurch es in die Lage $CB'A$ kommt, so läßt sich $\triangle B'CD$ in den Kreis legen, da $B'C=a$ und $CD=c$ werden muß. Ferner verhält sich $B'A:AD=b:d=m:n$, daher liegt A auf dem Apollonischen Kreis, dessen Durchmesser die Strecke zwischen den Teilpunkten ist, welche $B'D$ im Verhältnis $m:n$ teilen. Der Punkt B befindet sich auf dem gegebenen Kreise und auf der Parallele durch B' zu AC.

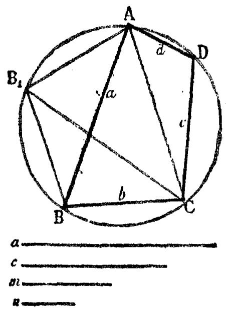


Fig. 102.

3. Beispiel. Gegeben sind die Geraden L, L' und auf L der Punkt A. Auf derselben Geraden den Punkt X so zu bestimmen, daß XA gleich dem Abstande der L' von X werde.

Analysis. In Fig. 103 sind L, L', A die gegebenen Elemente, sodann sei das Lot $XB=AX$. Wendet man das $\triangle BXC$ um die Mediane XC des $\sphericalangle BXA$ um, so fällt XB auf XA und BC auf AC. Daher ist $\sphericalangle \varepsilon = \delta$ und $\sphericalangle XAC = XBC = 1R$. Das Lot in A auf L bestimmt daher auf L' den

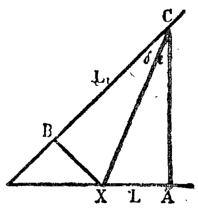


Fig. 103.

Punkt C und die Mediane des $\sphericalangle ACB$ schneidet L in X.

§ 123. Übungen.

1. Gleichseitiges $\triangle$ aus $a + h$.
2. Ebenso aus $a - h$.
3. Rechtwinklig gleichschenkliges $\triangle$ aus $a + b$.
4. Rechtwinkliges $\triangle$ aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse, in welche letztere durch die Mediane des rechten Winkels zerlegt wird.
5. Desgleichen aus den beiden Abschnitten einer Kathete, in welche diese durch die Mediane des Gegenwinkels geteilt wird.
6. Rechtwinkliges $\triangle$ aus a, $b + c$.
7. Desgleichen aus $b - h$, γ.
8. Desgleichen aus $b + c$, $\beta - \gamma$.
9. Desgleichen aus $b - c$, $\beta - \gamma$.
10. Gleichschenkliges $\triangle$ aus a, $b + h_a$.
11. Desgleichen aus $a + b$, α.
12. $\triangle$ aus $b + c$, a, α.
13. $\triangle$ aus $b - c$, a, α.
14. $\triangle$ aus $a + b + c$, β, γ.
15. $\triangle$ aus $a + b + c$, h_a, α.
16. $\triangle$ aus a, h_b, $\beta - \gamma$.
17. $\triangle$ aus a, $b + c$, h_b.
18. $\triangle$ aus u, v, $b - c$.
19. $\triangle$ aus u, v, γ.
20. $\triangle$ aus $p - q$, h_a, w_a.
21. $\triangle$ aus c, b, $\beta = 2\gamma$.
22. Rechteck aus $a + b + c + d$, e.
23. Sehnenviereck aus r, a, c, $b + d$.
24. Viereck aus $a + b + c$, α, β, γ, d.
25. In das $\triangle ABC$ ein Parallelogramm von gegebenem Umfang zu beschreiben, so daß beide Figuren einen Winkel gemeinsam haben.
26. Gegeben L, L', L''. Eine Linie senkrecht L' zu

ziehen, so daß die zwischen L und L'' fallende Strecke von L' halbiert werde.

27. Gegeben L, A, K und zwar A und K auf der gleichen Seite der L. Man soll in L den Punkt X finden, so daß XA und die Tangente von X an K mit L gleiche nach entgegengesetzten Seiten geöffnete Winkel bilden.

28. Gegeben L und die Punkte A, B auf verschiedenen Seiten der L. Man soll auf L den Punkt X so bestimmen, daß XB mit L einen doppelt so großen Winkel als XA bilde. (Beide Winkel sind nach der gleichen Seite geöffnet.)

29. Gegeben L und die Punkte A, B auf der gleichen Seite der L. Gesucht wird auf L der Punkt X, so daß XA und XB mit L zwei nach verschiedenen Seiten geöffnete Winkel von gegebenem Unterschied bilden.

30. Auf dem rechteckigen Billard liegen die Bälle A und B. In welcher Richtung muß A gestoßen werden, damit er, nachdem er von jedem Band zurückgeworfen worden ist, den Ball B trifft?

31. Das Quadrat $XYZU$ zu konstruieren, so daß die Ecken X und Z auf L, die Ecke Y auf L' und die Ecke U auf dem Kreise K liege.

32. Auf dem verlängerten Durchmesser AB des Kreises K liegt der Punkt C. Auf diesem Durchmesser den Punkt X zu finden, so daß XC gleich der von X an K gelegten Tangente werde.

§ 124. Die Methode der Drehung.

1. Die Drehung um einen durch das jeweilige Problem bestimmten Winkel kann vorteilhaft zur Lösung geometrischer Aufgaben verwendet werden. Sind Teile der Gesamtfigur kongruent, so gelangen sie durch Drehung zur Deckung, sind sie aber proportional, ähnlich, so kann man sie durch Drehung in solche Lage bringen, daß das Drehungszentrum Mittelpunkt eines sie tragenden Strahlenbüschels wird. Hierbei ist immer

vorausgesetzt, daß die homologen Stücke beider Figuren in gleichem Drehungssinne folgen. Bei der einen Gruppe von Aufgaben ist der Drehungsmittelpunkt gegeben, bei der anderen muß er erst aufgefunden werden. Das Drehungszentrum zweier kongruenter oder ähnlicher Figuren ist dasjenige zweier homologer Strecken. Man wendet das Drehungsverfahren an, um wichtige Punkte zu erhalten. Meistens bestimmt der gedrehte Teil einer Figur mit dem in Ruhe gebliebenen solche Punkte. Die Ermittlung des Mittelpunkts der Drehung liefert oft die Größe von Winkeln, die zur Konstruktion verwendet werden können.

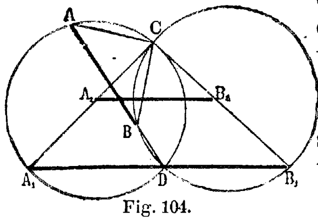


Fig. 104.

2. Sind die gleichen Strecken AB, CD gegeben, so wird das Drehungszentrum nach § 36, 2 bestimmt.

3. Wenn die Strecken AB, $A'B'$ ungleich sind — Fig. 104 —, so wird das Zentrum, das zugleich Mittelpunkt des sie tragenden Strahlenbüschels werden soll, durch die folgende Überlegung gefunden. Es schneide AB die $A'B'$ in D. Ist nun C das gesuchte Zentrum, so muß $\sphericalangle ACA' = BCB' = ADA'$ sein; mit anderen Worten: C liegt auf den Kreisen $AA'D$ und $BB'D$, und ist daher der zweite Schnittpunkt beider Kreise. Die neue Lage der AB ist $A''B''$.

4. Sucht man zu zwei Kreisen O, O' die beiden Schnittpunkte S und S' der äußeren bzw. inneren gemeinsamen Tangenten und wird über SS' als Durchmesser der Kreis beschrieben, so erscheinen von jedem Punkt seines Umfangs die beiden gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln. Demnach ist der Kreis

über SS' der geometrische Ort des Drehungszentrums beider Kreise. Eine bestimmte Stelle nimmt dieses Zentrum erst ein, wenn dem Punkte A der einen Peripherie der Punkt A' der anderen entsprechen soll. Dann aber wird es nach Nr. 3 ermittelt, und zwar mit Hilfe der Radien OA, $O'A'$. Für den Fall, daß die Kreise O, O' gleich sind, geht der Ortskreis in das Mittellot auf OO' über.

5. Der Drehungsmittelpunkt für zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks ist auch derjenige der beiden anderen. Beweis!

§ 125. Aufgaben.

1. Beispiel. Ein gleichseitiges Dreieck zu finden, dessen Ecken auf 3 Parallelen liegen.

Analysis. In Fig. 105 ist $L \parallel L' \parallel L''$ und ABC ein gleichseitiges Dreieck. Da man mit dem Dreieck ABC eine Parallelverschiebung längs der Parallelen vornehmen kann, so darf eine Ecke des $\triangle ABC$, z. B. B nach Gutdünken gewählt werden. Dreht man nun das $\triangle ABC$ um B um 60^0 und nimmt bei dieser Drehung die Ecke C die Linie L'' mit, so gelangt BC in die Lage BA und L'' nach L'''.

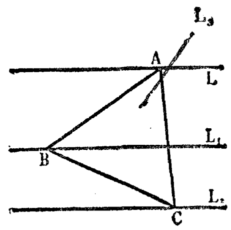


Fig. 105.

Der Punkt A wird demnach durch L und die um 60^0 gedrehte L'' bestimmt. Der Punkt C liegt auf L'' und zugleich auf einem Kreise um B mit BA.

2. Beispiel. Gegeben sind die gleichen Kreise O, O', auf dem Umfang des einen der Punkt A, auf dem des anderen der Punkt A'. Es soll auf der Peri-

pherie des Kreises O der Punkt X, auf derjenigen des Kreises O' der Punkt X' so gefunden werden, daß Bogen $AX = A'X'$ und Strecke $XX' = a$ werde. — Fig. 106.

Analysis. Man betrachte beide Kreise als kongruente Figuren, in denen sich A und A', O und O' entsprechen. Alsdann sind auch X und X' homolog. Bestimmt man den Drehungsmittelpunkt C beider Kreise, so wird nach der Drehung um C um $\sphericalangle ACA'$ das Gebilde O' mit dem Gebilde O zusammenfallen. Deswegen ist $CX' = CX$, $\sphericalangle XCX' = ACA'$. Das gleichschenklige Dreieck XCX' läßt sich in einer Nebenfigur aus $XX' = a$ und $\sphericalangle XCX' = ACA'$ konstruieren. Die Lösung ergibt die Länge der Schenkel CX und CX', wodurch man die Punkte X und X' ermitteln kann.

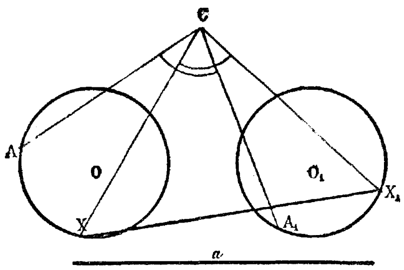


Fig. 106.

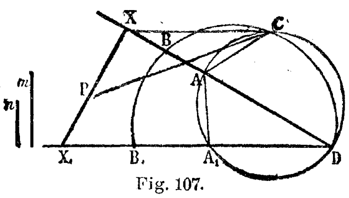


Fig. 107.

3. Beispiel. Auf den Schenkeln des Winkels D liegen die Punkte A, A'; außerdem ist P gegeben. Man soll durch P eine die Schenkel in X, X' schneidende Linie so ziehen, daß $AX : A'X' = m : n$ werde. (Aufgabe bei Apollonius: de sectione rationis.)

Analysis. Fig. 107. Es sei XPX' die gesuchte Gerade. Man setze die Strecken AX und $A'X'$ einander entsprechend; dann sind die auf den Schenkeln liegenden Punkte B und B' ebenfalls homolog, wenn man sie so wählt, daß $AB : A'B' = m : n$ ist. Die Punktpaare A und A', B und B' bestimmen den Mittelpunkt C der Drehung. Zieht man ferner CX, CX', CA und CA', so ist $\triangle CAA' \sim CXX'$; folglich ist $\sphericalangle X'XC = A'AC$ und damit liegt X auf einem Kreis über CP, der einen Winkel gleich $A'AC$ faßt.

§ 126. **Übungen.**

1. Gegeben sind der Kreis O, die Gerade L und zwischen beiden der Punkt A. Man soll durch A eine den Kreis in X, die L in X' schneidende Linie so ziehen, daß $AX = AX'$ werde.

2. Desgleichen, daß $AX : AX' = m : n$ werde.

3. In ein Quadrat ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, so daß eine Ecke des Dreiecks in eine Ecke des Quadrats fällt.

4. Ein gleichseitiges Dreieck zu finden, dessen Ecken auf den Umfängen dreier konzentrischer Kreise liegen.

5. Gegeben sind der Punkt P, die Geraden L, L' und $\triangle ABC$. Man soll auf L den Punkt X, auf L' den Punkt Y finden, so daß $\triangle PXY \sim ABC$ werde.

6. Gegeben ist $\triangle ABC$, auf BC der Punkt D. Man soll auf AB den Punkt E, auf AC den Punkt F bestimmen, so daß $\triangle DEF \sim ABC$ werde.

7. Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Ecken auf zwei gegebenen Kreisen liegen und zwar eine in einem gegebenen Punkte.

8. In ein gegebenes Parallelogramm ein Rechteck zu beschreiben, das einem gegebenen Rechteck ähnlich ist.

9. Einem gegebenen Parallelogramm einen Rhombus einzubeschreiben, dessen Diagonalen sich wie $m : n$ verhalten.

10. Ein Kreisviereck aus den vier Seiten zu konstruieren.

11. Auf den Schenkeln des Winkels D liegen die Punkte A, A'. Außerdem ist Punkt P gegeben. Man soll durch P eine den Schenkel DA in X, den Schenkel DA' in X' schneidende Gerade so ziehen, daß $AX = A'X'$ werde.

12. Desgleichen, daß $AX + A'X' = s$ werde.

13. Gegeben ist der $\sphericalangle A$ und der Punkt P. Man soll durch P eine die Schenkel in B, C schneidende Linie ziehen, so daß das $\triangle ABC$ eine gegebene Fläche hat.

14. Auf den Schenkeln des $\sphericalangle A$ sind die Punkte B, B' gegeben. Man soll eine den Schenkel AB in C, den Schenkel AB' in C' schneidende Linie ziehen, so daß $BC = B'C'$ und $CC' = a$ werde.

15. Desgleichen, daß $BC : B'C' = m : n$ und $CC' = a$ werde.

16. Beschreibt man um die vier Dreiecke, welche von vier einander schneidenden Geraden gebildet werden, die Umkreise, so gehen diese durch einen Punkt. Welche Bedeutung hat dieser Punkt?

17. In jedem Dreieck liegen der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Transversalen und der Schnittpunkt O der Mittellote auf den Seiten in einer Geraden und zwar ist $HS = 2 \cdot SO$.

§ 127. Die Methode der Rechnung.

1. Um eine planimetrische Konstruktionsaufgabe auf algebraischem Wege zu lösen, berechnet man die Länge einer oder mehrerer Strecken, mit deren Hilfe sich die Aufgabe in einfacher, ungezwungener Weise erledigen läßt. Zu diesem Zweck verbindet man die fraglichen Strecken mit anderen in der Aufgabe gegebenen durch Gleichungen, wozu mit Vorteil die Pythagoreischen Sätze, die Lehrsätze über proportionale Strecken, über die Ähnlichkeit und den Inhalt der Figuren Verwendung finden. Alsdann löst man die

Gleichungen nach den Unbekannten auf und konstruiert schließlich diejenigen Strecken, deren Maßzahlen gleich den gefundenen Ausdrücken sind. Die gegebenen Strecken oder richtiger ihre Maßzahlen, bezogen auf eine und dieselbe Einheit, bezeichnet man mit $a, b, c \ldots$, die gesuchten mit $x, y, z \ldots$

Bemerkung. Diejenigen planimetrischen Aufgaben, deren Lösung mit Zirkel und Lineal bewirkt werden kann, führen nur auf Gleichungen ersten oder zweiten Grades, nicht aber auf solche höheren Grades.

2. Strecken bzw. Inhalte heißen Größen erster bzw. zweiter **Dimension**, reine Zahlen sind von nullter Dimension. Sonach sind die Ausdrücke a, $2a$, $a + b$, $ab:c$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, $a^2 b : c^2 \ldots$ von der ersten Dimension; hingegen sind die Formen a^2, $2ab$, $a^2 b : c$, $c \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \ldots$ von zweiter Dimension. Ein Ausdruck wird **homogen** genannt, wenn alle seine Glieder von gleicher Dimension sind; z. B. $3x^2 + ax = bc$. Alle in der algebraischen Analysis geometrischer Aufgaben vorkommenden Ausdrücke sind homogen.

§ 128. Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

1. Die Konstruktionen der Ausdrücke $x = a \pm b$, $x = m \cdot a$, $x = a : m$, wo m eine Zahl ist, sind naheliegend.

2. Ist $x = ab : c$, so hat man auch $c : a = b : x$. Demnach ist x die vierte Proportionale zu a, b, c.

3. Findet man $x = \sqrt{a \cdot b}$, so ist x die mittlere Proportionale zu a, b.

4. Aus der Proportion $a : b = b : x$ bestimmt sich x als dritte Proportionale.

5. Ergibt die Rechnung $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, so erkennt man, daß x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten gleich a, b sind. Wird $b = a$, so ist $x = a \cdot \sqrt{2}$.

6. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ wird in der Weise hergestellt, daß man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich a und eine der beiden Katheten gleich b macht. Die andere Kathete ist gleich x.

7. Ist a die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, so ist die Höhe $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

8. Bedeutet m eine positive Zahl, so lassen sich alle Ausdrücke von der Form $x = a \cdot \sqrt{m}$ mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks konstruieren. Z. B. ist

$$x = a\sqrt{5} = \sqrt{a^2 + 4a^2}.$$

9. Ist in Fig. 86 $AC = a$, so erhält man für CO den Wert

$$\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \tfrac{1}{2}a \cdot \sqrt{5};$$

dann ist

$$CF = CD = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Der Ausdruck $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ sagt demnach aus, daß x der Maior der stetig geteilten a ist.

10. Zusammengesetzte Ausdrücke werden so umgestaltet, daß sie aus mehreren einfachen Formen bestehen.

Erstes Beispiel. $x = a\,b\,c : d^2$. Man hat $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{d}$. Setzt man $\frac{a\,b}{d} = y$ und bestimmt y nach Nr. 2, so ist

$x = \frac{y\,c}{d}$.

Zweites Beispiel. $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2\,b^2}$. Man findet $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (b\sqrt{2})^2}$.

Ermittle $y = b\sqrt{2}$ und $z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$ mittels Nr. 5, so ist $x = -\frac{a}{2} + z$.

§ 129. **Untersuchung des für x gefundenen Ausdrucks.**

1. Unmöglich ist die Aufgabe, wenn der für x gefundene Wert a) nicht innerhalb der für die fragliche Strecke vorhandenen Grenzen fällt; b) negativ ist, während die gesuchte Strecke eine absolute Größe sein soll; c) imaginär ist.

2. Ein negativer Wert für die Unbekannte x ist nur in dem Fall brauchbar, wenn die Lage der fraglichen Strecke in entgegengesetzter Richtung auch den Bedingungen der Aufgabe genügt.

3. Da jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat, so ist in solchen Fällen eine weitere Untersuchung anzustellen, ob beide Werte des x der vorliegenden Aufgabe entsprechen oder nur einer. Ein ausgeschlossener Wert genügt meistens einer verwandten Aufgabe oder der vorliegenden Aufgabe in allgemeinerer Fassung.

§ 130. Aufgaben.

1. Beispiel. C ist die Mitte der Strecke AB. Man hat über AB, AC und BC als Durchmesser Halbkreise nach derselben Seite errichtet. Es soll der Kreis konstruiert werden, welcher die drei Halbkreise berührt. — Fig. 108.

Analysis. Der Mittelpunkt E des gesuchten Kreises und sein Berührungspunkt D mit dem Halb-

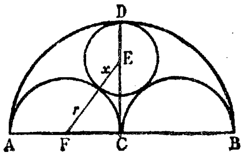


Fig. 108.

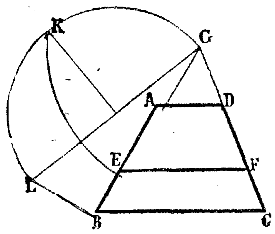


Fig. 109.

kreis um C liegen auf der Symmetrale der Figur, auf dem Lot, das man in C auf AB errichtet. Ist ferner F die Mitte der AC, so geht FE durch den Berührungspunkt der beiden Kreise F und E. Nun werde der Radius AF mit r, der Radius ED mit x bezeichnet. In dem rechtwinkligen $\triangle EFC$ ist $(r+x)^2 = r^2 + (2r-x)^2$ oder $r^2 + x^2 + 2rx = r^2 + 4r^2 + x^2 - 4rx$; somit $x = \frac{2}{3}r$, woraus die einfache Konstruktion folgt.

2. Beispiel. Das Trapez $ABCD$ durch eine Gerade parallel den Grundseiten zu halbieren. — Fig. 109.

Analysis. Es sei EF die gesuchte Halbierungslinie. Verlängere BA und CD bis zum Schnitt in G, und bezeichne die Strecken GA, GE, GB mit a, x, b. Die Dreiecke GBC, GEF, GAD sind ähnlich; ihre Inhalte verhalten sich wie die Quadrate homologer

Seiten, daher $GBC : GEF : GAD = b^2 : x^2 : a^2$; folglich verhält sich auch $(GBC - GEF) : (GEF - GAD) = (b - x^2) : (x^2 - a^2)$. Weil aber EF das Trapez halbieren soll, geht die Proportion in die Gleichung über $b^2 - x^2 = x^2 - a^2$. Die Auflösung derselben liefert $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

Konstruktion. Errichte das Lot BL auf BG und mache es gleich AG. Die Verbindungsstrecke GL ist gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$. Beschreibe über GL als Durchmesser den Halbkreis und errichte auf GL das Mittellot; beide Linien treffen sich in K. Um G schlage einen Kreis mit GK; dieser schneidet GB in E; ziehe durch E die Parallele zu BC, welche CD in F schneidet, so ist EF die verlangte Gerade.

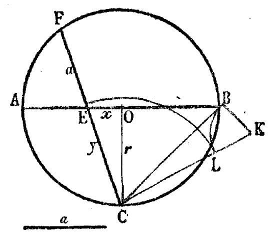


Fig. 110.

3. Beispiel. In dem Kreise O wurde der Durchmesser AB gezogen, und der eine Halbkreis in C halbiert. Man soll durch C eine den Durchmesser in E und den anderen Halbkreis in F schneidende Gerade so ziehen, daß $EF = a$ werde.

Analysis. Fig. 110. Es sei CEF die gesuchte Gerade. Man bezeichnet OC mit r, CE mit y, OE mit x. Das rechtwinklige $\triangle CEO$ liefert die Beziehung $y^2 = r^2 + x^2$. In dem Punkte E schneiden sich die Sehnen CF und AB; mithin gilt die Relation $ay = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2$. Addiert man beide Gleichungen, so kommt $y^2 + ay = 2r^2$; folglich ist

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}.$$

Weil die Strecke y eine absolute Größe ist, ist das negative Zeichen vor der Wurzel nicht brauchbar.

Konstruktion. Ziehe CB. Diese Strecke ist gleich $r \cdot \sqrt{2}$; auf CB errichte das Lot BK gleich $\frac{a}{2}$ und verbinde C mit K, welche Strecke gleich $\sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}$ sein wird. Von KC ziehe $KL = \frac{a}{2}$ ab, so ist der Rest $CL = CE = y$. Beschreibe mit y um C einen Bogen, der AB in E schneidet, ziehe CE mit Verlängerung. Es ist CEF die gewünschte Gerade.

Bemerkung. Der um C mit y als Radius beschriebene Kreisbogen schneidet AB noch in einem zweiten Punkte, dessen Verbindungslinie mit C ebenfalls eine Lösung der Aufgabe darstellt.

Untersuchung. Da $\sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}$ immer größer als $\frac{a}{2}$ ist, so kann der Ausdruck für y niemals negativ werden. Der um C mit y beschriebene Bogen muß den Durchmesser AB schneiden, woher es kommt, daß y nicht kleiner als r sein darf. Unmöglich wird somit die Aufgabe, wenn $-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2} < r$ ist, oder

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2} < r + \frac{a}{2};$$

quadriert:

$$\frac{a^2}{4} + 2r^2 < r^2 + \frac{a^2}{4} + ar\,;$$

hieraus folgt $r^2 < ar$, oder auch $r < a$; ein Resultat, das durch eine geometrische Betrachtung sofort gewonnen wird.

§ 131. Übungen.

1. Die Strecke AB stetig zu teilen.
2. Die Strecke AB in C so zu teilen, daß $AC \cdot BC = s^2$ werde.
3. Desgleichen, daß $AC^2 + BC^2 = s^2$ werde.
4. Gleichseitiges $\triangle$ aus $a + h$.
5. Das $\triangle ABC$ in ein gleichseitiges zu verwandeln.
6. Ein Quadrat zu zeichnen aus $e + a$ oder $e - a$.
7. Rechteck aus F und $a + b$, bzw. $a - b$.
8. Das $\triangle ABC$ in ein anderes zu verwandeln, das dem gegebenen $\triangle DEF$ ähnlich ist.
9. Das $\triangle ABC$ durch eine Gerade parallel L in zwei Teile zu zerlegen, die sich wie $m:n$ verhalten.
10. In einen Quadranten den Inkreis zu zeichnen.
11. In das Quadrat $ABCD$ ein anderes Quadrat zu zeichnen, dessen Seite $= s$ ist.
12. Um das Rechteck $ABCD$ ein anderes zu beschreiben, dessen Seiten von denen des ersten überall gleichweit abstehen, so daß der Rahmen das m-fache des gegebenen Rechtecks ist.
13. In das rechtwinklige $\triangle ABC$ ein Quadrat einzubeschreiben, so daß zwei Ecken auf die Hypotenuse fallen.
14. In das $\triangle ABC$ ein Quadrat einzubeschreiben.
15. In das $\triangle ABC$ ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Inhalt gegeben ist.
16. Desgleichen, dessen Umfang gegeben ist.
17. In ein gleichseitiges Dreieck von der Seite a ein anderes einzubeschreiben, welches das $^3/_4$-fache des gegebenen

ist. Wie lang ist der Radius des Umkreises für das gesuchte Dreieck?

18. Von einem gegebenen Dreieck ein Sehnenviereck gleich $^2/_3$ des gegeben Dreiecks abzuschneiden.

19. In dem Kreise O ist der Durchmesser AB gezogen, in B ist die Tangente an den Kreis gelegt. Man soll durch A eine den Kreis in E und die Tangente in F schneidende Linie so ziehen, daß $EF = a$ werde. (Apollonius: de inclinationibus.)

20. Einen Kreis zu beschreiben, der durch die Punkte A, B geht und aus der Geraden L eine Sehne $= s$ ausschneidet.

21. In dem Kreise O wurde die Sehne AB gezogen und der kleinere Bogen in C halbiert. Man soll durch C eine die Sehne in E und den größeren Bogen in F schneidende Linie so ziehen, daß $EF = a$ werde.

22. $\triangle$ aus a, r, w_a.

23. Das Trapez $ABCD$ durch eine Gerade parallel den Grundseiten in zwei Teile zu zerlegen, die sich wie $m:n$ verhalten.

Sammlung Göschen

Jeder Band in Leinw. geb. **90 Pf.**

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Abwässer. Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung von Professor Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landw. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre v. Dr. Paul Rippert i. Essen u. Ernst Langenbeck, Gr.-Lichterfelde. Nr. 232.

Agrarwesen und Agrarpolitik von Prof. Dr. W. Wygodzinski in Bonn. 2 Bändchen. **I:** Boden u. Unternehmung. Nr. 592.

— — **II:** Kapital u. Arbeit in der Landwirtschaft. Verwertung der landwirtschaftl. Produkte. Organisation des landwirtschaftl. Berufsstandes. Nr. 593.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das, v. Dr. Paul Krische in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.

— **Untersuchungsmethoden** von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftl. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.

Akkumulatoren, Die, für Elektrizität v. Kais. Reg.-Rat Dr.-Jng. Richard Albrecht in Berlin-Zehlendorf. Mit 52 Figuren. Nr. 620.

Akustik. Theoret. Physik I: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.

— **Musikalische,** von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik und Algebra von Dr. H. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Algebra. Beispielsammlung z. Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums i. Hamburg. Nr. 48.

Algebraische Kurven v. Eugen Beutel. Oberreallehrer in Vaihingen-Enz, **I:** Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.

— — **II:** Theorie u. Kurven dritter u. vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität Graz. Mit 19 Abb. u. 1 Karte. Nr. 129.

Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterungen v. Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Alttestamentl. Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 292.

Amphibien. Das Tierreich III: Reptilien u. Amphibien v. Dr. Franz Werner, Prof. an der Universität Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 383.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Rektor des Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.

— — **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junker, Rektor d. Realgymnas. u. d. Oberrealsch. in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Analysis, Höhere, II: Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

— — **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen. Mit 50 Figuren. Nr. 147.

— **Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterversicherung siehe: Sozialversicherung.

Archäologie von Dr. Friedrich Koepp, Prof. an der Universität Münster i. W. 3 Bändchen. M. 28 Abb. im Text u. 40 Tafeln. Nr. 538/40.

Arithmetik u. Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — **Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armeepferd, Das, und die Versorgung der modernen Heere mit Pferden v. Felix von Damnitz, General der Kavallerie z. D. u. ehemal. Preuß. Remonteinspekteur. Nr. 514.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in d. soziale Hilfsarbeit v. Dr. Adolf Weber, Prof. an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer a. d. Kgl. Akademie d. bild. Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Universität Kiel. **I:** Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— — **II:** Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper v. Prof. W. F. Wislicenus. Neu bearbeitet von Dr. H. Ludendorff in Potsdam. Mit 15 Abbild. Nr. 91.

Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Aufsatzentwürfe v. Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnas. i. Stuttg. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. 2 Bändchen. Mit 16 Figuren. Nr. 302 u. 641.

Außereuropäische Erdteile, Länderkunde der, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Australien. Landeskunde u. Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Prof. d. Geographie an d. Handels-Hochschule in Köln. Mit 8 Abb., 6 graph. Tab. u. 1 Karte. Nr. 319.

Autogenes Schweiß- und Schneidverfahren von Ingen. Hans Niese in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.

Bade- u. Schwimmanstalten, Öffentliche, v. Dr. Karl Wolff, Stadtoberbaur., Hannover. M. 50 Fig. Nr. 380.

Baden. Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnas. in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **Landeskunde von Baden** von Prof. Dr. O. Kienitz i. Karlsruhe. Mit Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 199.

Bahnhöfe. Hochbauten der Bahnhöfe v. Eisenbahnbauinspekt. C. Schwab, Vorstand d. Kgl. E.-Hochbausektion Stuttgart II. **I:** Empfangsgebäude. Nebengebäude. Güterschuppen. Lokomotivschuppen. Mit 91 Abbildungen. Nr. 515.

Balkanstaaten. Geschichte d. christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bankwesen. Technik des Bankwesens von Dr. Walter Conrad, stellvert. Vorsteher der statist. Abteilung der Reichsbank in Berlin. Nr. 484.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung v. Archit. Emil Beutinger, Assistent an d. Techn. Hochschule in Darmstadt. M. 25 Fig. u. 11 Tabell. Nr. 399.

Baukunst, Die, des Abendlandes v. Dr. K. Schäfer, Assist. a. Gewerbemuseum, Bremen. Mit 22 Abb. Nr. 74.

— **des Schulhauses** v. Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein, Darmstadt. **I:** Das Schulhaus. M. 38 Abb. Nr. 443.

— — **II:** Die Schulräume — Die Nebenanlagen. M. 31 Abb. Nr. 444.

Bausteine. Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Baustoffkunde, Die, v. Prof. H. Haberstroh, Oberl. a. d. Herzogl. Baugewerkschule Holzminden. Mit 36 Abbildungen. Nr. 506.

Bayern. Bayerische Geschichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **Landeskunde des Königreichs Bayern** v. Dr. W. Götz, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule München. M. Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 176.

Befestigungswesen. Die geschichtliche Entwicklung des Befestigungswesens vom Aufkommen der Pulvergeschütze bis zur Neuzeit von Reulcaux, Major b. Stabe d. 1. Westpreuß. Pionierbataill. Nr. 17. Mit 30 Bildern. Nr. 569.

Beschwerderecht. Das Disziplinar- u. Beschwerderecht für Heer u. Marine v. Dr. Max E. Mayer, Prof. a. d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 517.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. 1. Teil: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verschied. Kraftmaschinen. M. 27 Abb. Nr. 224.

— — **II:** Gas-, Wasser- u. Windkraftanlagen. M. 31 Abb. Nr. 225.

— — **III:** Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graph. Darstell. Wahl d. Betriebskraft. M. 27 Abb. Nr. 474.

Bewegungsspiele v. Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymn. zu Hannover. M. 15 Abb. Nr. 96.

Bleicherei. Textil-Industrie **III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** v. Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186

Blütenpflanzen, Das System der, mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Kustos am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Bodenkunde von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.

Brandenburgisch-Preußische Geschichte von Prof. Dr. M. Thamm, Dir. des Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.

Brasilien. Landeskunde der Republik Brasilien von Bel Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 373.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Dir. der Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Britisch-Nordamerika. Landeskunde von Britisch-Nordamerika v. Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abb. und 1 Karte. Nr. 284.

Buchführung in einfachen u. doppelten Posten v. Prof. Rob. Stern, Oberl. d. Öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule zu Leipzig. M. vielen Formul. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Bürgerliches Gesetzbuch siehe: Recht des BGB.

Byzantinisches Reich. Geschichte des byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Chemie, Allgemeine u. physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Prof. an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe in München. **I:** Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — **II:** Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Chemie, Geschichte der, von Dr. Hugo Bauer, Assist. am chemischen Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart **I:** Von den ältesten Zeiten bis z. Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— — **II:** Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen von** Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium d. Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. **I. II:** Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — **III:** Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — **IV:** Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Pharmazeutische,** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.

— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. **I:** Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — **II:** Dissimilation. M. 1 Tafel. Nr. 241.

— **Toxikologische,** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Chemische Industrie, Anorganische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. **I:** Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— — **II:** Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— — **III:** Anorganische chemische Präparate. M. 6 Taf. Nr. 207.

Chemische Technologie, Allgemeine, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Christlichen Literaturen des Orients, Die, von Dr. Anton Baumstark. **I:** Einleitung. — Das christlich-aramäische u. d. koptische Schrifttum. Nr. 527.

— — **II:** Das christl.-arab. und das äthiop. Schrifttum. — Das christl. Schrifttum d. Armenier und Georgier. Nr. 528.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedr. Barth in Nürnberg. **I:** Kesselsysteme und Feuerungen. Mit 43 Fig. Nr. 9.

— — **II:** Bau und Betrieb der Dampfkessel. M. 57 Fig. Nr. 521.

Dampfmaschinen, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2 Bdchn. **I:** Wärmetheoretische und dampftechnische Grundlagen. Mit 64 Fig. Nr. 8.

— — **II:** Bau und Betrieb der Dampfmaschinen. Mit 109 Fig. Nr. 572.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise u. Konstruktion von Ingen. Herm. Wilda, Prof. a. staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.

Desinfektion von Dr. M. Christian, Stabsarzt a. D. in Berlin. Mit 18 Abbildungen. Nr. 546.

Determinanten von P. B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealsch. z. Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Deutsche Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Dir. d. städt. Museums in Braunschweig. M. 70 Abb. Nr. 124.

Deutsche Fortbildungsschulwesen, Das, nach seiner geschichtlichen Entwicklung u. in seiner gegenwärt. Gestalt von H. Siercks, Revisor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.

Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Deutsche Geschichte von Dr. F. Kurze, Prof. a. Kgl. Luisengymnas. in Berlin. **I: Mittelalter** (bis 1519) Nr. 33.

— — **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1517 bis 1648). Nr. 34.

— — **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806). Nr. 35.

— — siehe auch: Quellenkunde.

Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Prof. Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.

Deutsches Handelsrecht von Dr. Karl Lehmann, Prof. an der Universität Göttingen. 2 Bde. Nr. 457 u. 458.

Deutsche Heldensage, Die, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an d. Universität Würzburg. Nr. 32.

Deutsche Kirchenlied, Das, in seinen charakteristischen Erscheinungen ausgewählt v. D. Friedrich Spitta, Prof. a. d. Universität in Straßburg i. E. **I:** Mittelalter u. Reformationszeit. Nr. 602.

Deutsches Kolonialrecht von Prof. Dr. H. Edler von Hoffmann, Studiendirektor der Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 318.

Deutsche Kolonien. I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 441.

— **II: Das Südseegebiet und Kiautschou** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 520.

— **III: Ostafrika** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.

— **IV: Südwestafrika** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 637.

Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- u. Kunstepen u. zum Minnesang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. **I:** Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.

— — **II:** Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.

Deutsche Literatur des 13. Jahrhunderts. Die Epigonen d. höfischen Epos. Auswahl a. deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Deutsche Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. I: Martin Luther u. Thom. Murner. Ausgewählt u. mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— — **II: Hans Sachs.** Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. J. Sahr. Nr. 24.

Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos u. Fabel. Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

— **des 17. und 18. Jahrhunderts bis Klopstock. I:** Lyrik von Dr. Paul Legband in Berlin. Nr. 364.

— — **II:** Prosa v. Dr. Hans Legband in Kassel. Nr. 365.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **der Klassikerzeit** v. Carl Weitbrecht, durchgesehen u. ergänzt v. Karl Berger. Nr. 161.

— **des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, neu bearbeitet von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.

Deutschen Mundarten, Die, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.

Deutsche Mythologie. Germanische Mythologie von Dr. Eugen Mogk, Prof. a. d. Univers. Leipzig. Nr. 15.

Deutschen Personennamen, Die, v. Dr. Rud. Kleinpaul i. Leipzig. Nr. 422.

Deutsche Poetik von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Deutsche Rechtsgeschichte v. Dr. Richard Schröder, Prof. a. d. Univers. Heidelberg. **I:** Bis z. Mittelalter. Nr. 621.

— — **II:** Die Neuzeit. Nr. 664.

Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. i. Bamberg. Nr. 61.

Deutsche Schule, Die, im Auslande von Hans Amrhein, Seminaroberlehrer in Rheydt. Nr. 259.

Deutsches Seerecht v. Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. **I:** Allgem. Lehren: Personen u. Sachen d. Seerechts. Nr. 386.

— — **II:** Die einz. seerechtl. Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts u. außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Deutsche Stadt, Die, und ihre Verwaltung. Eine Einführung i. d. Kommunalpolitik d. Gegenw. Herausgeg. v. Dr. Otto Most, Beigeordn. d. Stadt Düsseldorf. **I:** Verfassung u. Verwaltung im allgemeinen; Finanzen und Steuern; Bildungs- und Kunstpflege; Gesundheitspflege. Nr. 617.

— — **II:** Wirtschafts- u. Sozialpolitik. Nr. 662.

— — **III:** Technik: Städtebau, Tief- u. Hochbau. Mit 48 Abb. Nr. 663.

Deutsche Stammeskunde v. Dr. Rud. Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.

Deutsches Unterrichtswesen. Geschichte des deutschen Unterrichtswesens v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. **I:** Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— — **II:** Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Deutsche Urheberrecht, Das, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internat. Verträge v. Dr. Gust. Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Deutsche Volkslied, Das, ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25 u. 132.

Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Geheimer Kriegsrat u. vortragender Rat im Kriegsministerium in München. Nr. 401.

Deutsches Wörterbuch v. Dr. Richard Loewe. Nr. 64.

Deutsche Zeitungswesen, Das, von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.

Deutsches Zivilprozeßrecht von Prof. Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Deutschland in römischer Zeit von Dr. Franz Cramer, Provinzialschulrat zu Münster i. W. Mit 23 Abbildungen. Nr. 633.

Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Ausw. mit Einltg. u. Wörterb. herausgeg. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung u. Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. a. d. Universität Würzburg. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.

— **Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Pumpen, Druckwasser- u. Druckluft-Anlagen von Dipl.-Ingen. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumstr. a. D. in Aachen. Mit 87 Fig. Nr. 290.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzg. u. Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenbahnbau. Die Entwicklung des modernen Eisenbahnbaues v. Dipl. Ing. Alfred Birk, o. ö. Prof. a. d. k. k. Deutschen Techn. Hochschule in Prag. Mit 27 Abbild. Nr. 553.

Eisenbahnen, Die Linienführung der, von H. Wegele, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 52 Abbildungen. Nr. 623.

Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal, Regierungsbaumeister u. Oberingen. in Hannover. **I:** Die Lokomotiven. Mit 89 Abbild. im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.

— — **II:** Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit Anh.: Die Eisenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 56 Abb. im Text u. 3 Taf. Nr. 108.

Eisenbahnpolitik. Geschichte d. deutschen Eisenbahnpolitik v. Betriebsinspektor Dr. Edwin Kech in Karlsruhe i. B. Nr. 533.

Eisenbahnverkehr, Der, v. Kgl. Eisenbahn-Rechnungsdirektor Th. Wilbrand in Berlin-Friedenau. Nr. 618.

Eisenbetonbau, Der, v. Reg.-Baumstr. Karl Rößle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.

Eisenbetonbrücken von Dr.-Ing. K. W. Schaechterle in Stuttgart. Mit 104 Abbildungen. Nr. 627.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningenieur. **I:** Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Taf. Nr. 152.

— — **II:** Das Schmiedeisen. M. 25 Fig. u. 5 Taf. Nr. 153.

Eisenkonstruktionen im Hochbau von Ingen. Karl Schind'er in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Eiszeitalter, Das, v. Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.

Elastizitätslehre für Ingenieure I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene Platten, Torsion, Gekrümmte Träger. Von Dr.-Ing. Max Enßlin, Prof. a. d. Kgl. Baugewerkschule Stuttgart und Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 60 Abbild. Nr. 519.

Elektrischen Meßinstrumente, Die, von J. Herrmann, Prof. an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Mit 195 Figuren. Nr. 477.

Elektrische Telegraphie, Die, von Dr. Lud. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Elektrizität. Theoret. Physik III: Elektrizität u. Magnetismus von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel in Genf. **I:** Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 16 Fig. Nr. 252.

— — **II:** Experiment. Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.

Elektromagnet. Lichttheorie. Theoret. Physik IV: Elektromagnet. Lichttheorie u. Elektronik von Professor Dr. Gust. Jäger in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Elektrometallurgie von Dr. Friedrich Regelsberger, Kaiserl. Reg.-Rat in Steglitz-Berlin. M. 16 Fig. Nr. 110.

Elektrotechnik. Einführung in die Starkstromtechnik v. J. Herrmann, Prof. d. Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. **I:** Die physikalischen Grundlagen. Mit 95 Fig. u. 16 Taf. Nr. 196.

— — **II:** Die Gleichstromtechnik. Mit 118 Fig. und 16 Taf. Nr. 197.

— — **III:** Die Wechselstromtechnik. Mit 154 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

Elektrotechnik. Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ingenieur Prof. Hermann Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildgn. Nr. 476.

Elsaß-Lothringen, Landeskunde von, v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 215.

Englisch-deutsches Gesprächsbuch von Prof. Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.

Englische Geschichte v. Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — **Grundzüge und Haupttypen d. englischen Literaturgeschichte** von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Englische Phonetik mit Lesestücken von Dr. A. C. Dunstan, Lektor an der Univers. Königsberg i. Pr. Nr. 601.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Jena. **I:** Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Figuren. Nr. 378.

— — **II:** Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdbau von Reg.-Baum. Erwin Link in Stuttgart. Mit vielen Abbild. Nr. 630.

Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts in Potsdam. Mit 7 Tafeln und 16 Figuren. Nr. 175.

Erdteile, Länderkunde der außereuropäischen, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Professor H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbild. Nr. 464.

Ethik von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Europa, Länderkunde von, von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakademie in Wien. Mit 14 Textkärtchen u. Diagrammen u. einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen d. häufigeren i. Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile Mit je 50 Abbildungen. Nr. 268 und 269.

Experimentalphysik v. Prof. R. Lang in Stuttgart. **I:** Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper. Mit 125 Figuren. Nr. 611.

Explosivstoffe. Einführung in d. Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Steglitz. Mit 6 Abbild. und 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht d. Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilhelm Massot, Prof. an der Preußischen höheren Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Feldgeschütz, Das moderne, v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer a. d. Militärtechn. Akademie in Berlin. **I:** Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschl. der Erfindung des rauchl. Pulvers, etwa 1850 bis 1890. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— — **II:** Die Entwicklung d. heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abbild. Nr. 307

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre v. W. Hauber, Dipl.-Ingenieur. Mit 56 Fig. Nr. 288.

— **Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen** von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Fig. Nr. 491.

Fette, Die, und Öle sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Lacke, Firnisse m. ihren wicht. Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. **I:** Einf. in d. Chemie, Besprech. einiger Salze u. d. Fette u. Öle. Nr. 335.

— — **II:** Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

— — **III:** Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Feuerwaffen. Geschichte d. gesamten Feuerwaffen bis 1850. Die Entwicklung der Feuerwaffen v. ihrem ersten Auftreten bis zur Einführung der gezogenen Hinterlader, unter besonderer Berücksichtig. d. Heeresbewaffnung von Major a. D. W. Gohlke, Steglitz-Berlin. Mit 105 Abbildungen. Nr. 530.

Feuerwerkerei, Die, von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Städtischen Chemischen Laboratoriums in Stuttgart. Mit 6 Fig. Nr. 634.

Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Geh. Regierungsr. im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Finanzsysteme der Großmächte, Die, (Internat. Staats- und Gemeinde-Finanzwesen) v. O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat in Berlin.. 2 Bändchen. Nr. 450 und 451.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. **I:** Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— — **II:** Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft von Dr. Josef Szinnyei, Prof. an der Universität Budapest. Nr. 463.

Finnland. Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands von Prof. Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

Firnisse. Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Fette und Öle III.) Nr. 337.

Fische. Das Tierreich IV: Fische von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Mit 37 Abbild. Nr. 356.

Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Flora. Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen v. Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbild. Nr. 268, 269.

Flußbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 103 Abbildungen. Nr. 597.

Forensische Psychiatrie von Professor Dr. W. Weygandt, Dir. d. Irrenanstalt Friedrichsberg i. Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

Forstwissenschaft v. Dr. Ad. Schwappach, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirig. bei d. Hauptstation d. forstl. Versuchswesens. Nr. 106.

Fortbildungsschulwesen, Das deutsche, nach seiner geschichtl. Entwicklung u. i. sein. gegenwärt. Gestalt v. H. Siercks, Revisor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.

Franken. Geschichte Frankens v. Dr. Christ. Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D., München. Nr. 434.

Frankreich. Französische Geschichte v. Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 85.

Frankreich. Landesk. v. Frankreich v. Dr. Rich. Neuse, Direkt. d. Oberrealschule in Spandau. 1. Bändch. M. 23 Abb. im Text u. 16 Landschaftsbild. auf 16 Taf. Nr. 466.

— — 2. Bändchen. Mit 15 Abb. im Text, 18 Landschaftsbild. auf 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 467.

Französisch-deutsches Gesprächsbuch von C. Francillon, Lektor am orientalisch. Seminar u. an d. Handelshochschule in Berlin. Nr. 596.

Französische Handelskorrespondenz v. Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.

Französisches Lesebuch mit Wörterverzeichnis von Cyprien Francillon, Lektor a. oriental. Seminar u. a. d. Handelshochschule i. Berlin. Nr. 643.

Fremdwort, Das, im Deutschen v. Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 273.

Fuge. Erläuterung u. Anleitung zur Komposition derselben v. Prof. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Funktionentheorie, Einleitung in die, (Theorie der komplexen Zahlenreihen) v. Max Rose, Oberlehrer an der Goetheschule in Deutsch-Wilmersdorf. Mit 10 Fig. Nr. 581.

Fußartillerie, Die, ihre Organisation, Bewaffnung u. Ausbildg. v. Splett, Oberleutnant im Lehrbataillon der Fußartillerie-Schießschule u. Biermann, Oberleutnant in der Versuchsbatter. d. Artillerie-Prüfungskommission. Mit 35 Fig. Nr. 560.

Gardinenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ingen. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.

Gaskraftmaschinen, Die, v. Ing. Alfred Kirschke in Kiel. 2 Bändchen. Mit vielen Figuren. Nr. 316 u. 651.

Gasthäuser und Hotels von Architekt Max Wöhler in Düsseldorf. **I:** Die Bestandteile u. die Einrichtung des Gasthauses. Mit 70 Fig. Nr. 525.

— — **II:** Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Fig. Nr. 526.

Gebirgsartillerie. Die Entwicklung der Gebirgsartillerie von Klußmann, Oberst u. Kommandeur der 1. Feld-Art.-Brigade in Königsberg i. Pr. Mit 78 Bildern und Übersichtstafeln. Nr. 531.

Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland v. Dr. Otto Lindecke in Düsseldorf. Nr. 384.

Geodäsie von Prof. Dr. C Reinhertz in Hannover. Neubearbeitet von Dr. G. Förster, Observator a. Geodätisch. Inst. Potsdam. M. 68 Abb. Nr. 102.

— **Vermessungskunde** v. Diplom-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule i. Straßburg i. E. **I:** Feldmessen u. Nivellieren. Mit 146 Abb. **II:** Der Theodolit. Trigonometrische und barometr. Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Geographie, Geschichte der, von Prof. Dr. Konrad Kretschmer i. Charlottenburg. Mit 11 Kart. im Text. Nr. 624.

Geologie in kurzem Auszug f. Schulen u. zur Selbstbelehrung zusammengestellt v. Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. u. 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene v. Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 52 Figuren. Nr. 65.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— — **des Raumes** von Prof. Dr M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie des Raumes** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.

— **Darstellende,** von Dr. Robert Haußner, Prof. an d. Univ. Jena. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

— **Ebene,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarbigen Figuren. Nr. 41.

— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.

Geometrische Optik, Einführung in die, von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt u. Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof. a. d. Univ. Leipzig. Nr. 15.

Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe. Nr. 238.

Gesangskunst. Technik der deutschen Gesangskunst von Osk. Noë u. Dr. Hans Joachim Moser. Nr. 576.

Geschäfts- und Warenhäuser v. Hans Schliepmann, Königl. Baurat in Berlin. **I:** Vom Laden zum „Grand Magasin". Mit 23 Abb. Nr. 655.

Geschäfts- und Warenhäuser v. Hans Schliepmann, Königl. Baurat in Berlin. **II:** Die weitere Entwickelung der Kaufhäuser Mit 39 Abbildungen. Nr. 656.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, v. Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univ. Greifswald. Nr. 270.

Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie v. Mummenhoff, Major u. Lehrer an d. Fußartillerie-Schießschule in Jüterbog. **I:** Vom Auftreten d. gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890. Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— — **II:** Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Geschwindigkeitsregler der Kraftmaschinen, Die, von Dr.-Ing. H. Kröner in Friedberg. Mit 33 Figuren. Nr. 604.

Gesetzbuch, Bürgerliches, sieh.: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten v. E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Gewerbehygiene von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203, 204.

Gewerbliche Arbeiterfrage, Die, von Werner Sombart, Prof. a. d. Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Gewerbliche Bauten. Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. **I:** Allgemeines über Anlage und Konstruktion der industriellen und gewerblichen Bauten. Nr. 511.

— — **II:** Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- u. Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gießereimaschinen von Dipl.-Ing. Emil Treiber in Heidenheim a. B. Mit 51 Figuren. Nr. 548.

Glas- und keramische Industrie (Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels I) v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.

Gleichstrommaschine, Die, von Ing. Dr. C. Kinzbrunner in London. Mit 81 Figuren. Nr. 257.

Gletscherkunde v. Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung u. Erläutergn. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue. Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl a. d. höfisch. Epos m. Anmerk. u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichs-Kollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Graphischen Künste, Die, von Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen u. Beilagen. Nr. 75.

Griechische Altertumskunde v. Prof. Dr. Rich. Maisch, neu bearbeitet v. Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Griechische Geschichte von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an d. deutschen Universität Prag. Nr. 49.

Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung d. Geschichte der Wissenschaften v. Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univ. Breslau. 2 Bändchen. Nr. 70 u. 557.

Griechischen Papyri, Auswahl aus, von Prof. Dr. Robert Helbing in Karlsruhe i. B. Nr. 625.

Griechischen Sprache, Geschichte der, I: Bis zum Ausgange d. klassischen Zeit v. Dr. Otto Hoffmann, Prof. a. d. Univ. Münster. Nr. 111.

Griechische u. römische Mythologie v. Prof. Dr. Herm. Steuding, Rekt. d. Gymnas. in Schneeberg. Nr. 27.

Grundbuchrecht, Das formelle, von Oberlandesgerichtsr. Dr. F. Kretzschmar in Dresden. Nr. 549.

Handelspolitik, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.

Handelsrecht, Deutsches, von Dr. Karl Lehmann, Prof. an d. Universität Göttingen. **I:** Einleitung. Der Kaufmann u. seine Hilfspersonen. Offene Handelsgesellschaft. Kommandit- u. stille Gesellsch. Nr. 457.

— — **II:** Aktiengesellschaft. Gesellsch. m. b. H. Eing. Gen. Handelsgesch. Nr. 458.

Handelsschulwesen, Das deutsche, von Direktor Theodor Blum in Dessau. Nr. 558.

Handelsstand, Der, von Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer in Leipzig (Kaufm. Rechtsk. Bd. 2). Nr. 545.

Handelswesen, Das, von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. **I:** Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— — **II:** Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Handfeuerwaffen, Die Entwicklung der, seit der Mitte des 19. Jahrhunderts u. ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Hauptmann u. Kompagniechef im Inf.-Reg. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 in Soldau. Mit 21 Abbildgn. Nr. 366.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus d. höfischen Epos mit Anmerk. u. Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königl. Friedrichs-Kollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III). Nr. 337.

Hebezeuge, Die, ihre Konstruktion u. Berechnung von Ing. Prof. Herm. Wilda, Bremen. Mit 399 Abb. Nr. 414.

Heeresorganisation, Die Entwicklung der, seit Einführung der stehenden Heere von Otto Neuschler, Hauptmann u. Batteriechef in Ulm. **I:** Geschichtl. Entwicklung bis zum Ausgange d. 19. Jahrh. Nr. 552.

Heizung u. Lüftung v. Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. **I:** Das Wesen u. die Berechnung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.

Heizung u. Lüftung v. Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. **II:** Die Ausführung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Hessen. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck v. Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Hieroglyphen von Geh. Regier.-Rat Dr. Ad. Erman, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 608.

Hochspannungstechnik, Einführ. in die moderne, von Dr.-Ing. K. Fischer in Hamburg-Bergedorf. Mit 92 Fig. Nr. 609.

Holz, Das. Aufbau, Eigenschaften u. Verwendung v. Ing. Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 33 Abb. Nr. 459.

Hotels. Gasthäuser und Hotels von Archit. Max Wöhler in Düsseldorf. **I:** Die Bestandteile u. d. Einrichtg. d. Gasthauses. M. 70 Fig. Nr. 525.

— — **II:** Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Figuren. Nr. 526.

Hydraulik v. W. Hauber, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 397.

Hygiene des Städtebaus, Die, von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit. 30 Abb. Nr. 348.

— **des Wohnungswesens, Die,** von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 5 Abbild. Nr. 363.

Iberische Halbinsel. Landeskunde der Iberischen Halbinsel von Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. M. 8 Kärtchen u. 8 Abb. im Text u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Indogerman. Sprachwissenschaft von Dr. R. Meringer, Professor an der Univers. Graz. M. 1 Tafel. Nr. 59.

Industrielle u. gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. **I:** Allgemeines üb. Anlage u. Konstruktion d. industriellen u. gewerblichen Bauten. Nr. 511.

— — **II:** Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Insekten. Das Tierreich V: Insekten von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.

Instrumentenlehre v. Musikdir. Franz Mayerhoff in Chemnitz. **I:** Text. Nr. 437.

— — **II:** Notenbeispiele. Nr. 438.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

— **Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. M. 52 Fig. Nr. 147.

Israel. Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Italienische Handelskorrespondenz v. Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Voßler, Professor an der Universität München. Nr. 125.

Kalkulation, Die, im Maschinenbau von Ingen. H. Bethmann, Dozent am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.

Kältemaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen von M. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.

Kamerun. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.

Kanal- und Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abb. Nr. 585.

Kant, Immanuel. (Geschichte der Philosophie Bd. 5) von Dr. Bruno Bauch, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 536.

Kartell u. Trust v. Dr. S. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522

Kartenkunde von Dr. M. Groll, Kartograph i. Berlin. 2 Bändchen. **I:** Die Projektionen. Mit 56 Fig. Nr. 30.

Kartenkunde von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. **II:** Der Karteninhalt und das Messen auf Karten. Mit 39 Fig. Nr. 599.

Kartographische Aufnahmen u. geograph. Ortsbestimmung auf Reisen von Dr.-Ing. R. Hugershoff, Prof. an der Forstakademie zu Tharandt. Mit 73 Figuren. Nr 607.

Kaufmännische Rechtskunde. I: Das Wechselwesen v. Rechtsanwalt Dr. Rud. Mothes in Leipzig. Nr. 103.

— **II:** Der Handelsstand v. Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer, Leipzig. Nr. 545.

Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer a. d. Öffentl. Handelslehranstalt d. Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.

Keramische Industrie. Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gust. Rauter. **I:** Glas- u. keram. Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

Kerzenfabrikation. Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abb. Nr. 336.

Kiautschou. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.

Kinematik von Dipl.-Ing. Hans Polster, Assist. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. M. 76 Abb. Nr. 584.

Kirchenrecht v. Dr. E. Sehling, ord. Prof. d. Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Klima und Leben (Bioklimatologie) von Dr. Wilh. R. Eckardt, Assist. an der öffentl. Wetterdienststelle in Weilburg. Nr. 629.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Figuren. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.

Kolonialrecht, Deutsches, von Prof. Dr. H. Edler von Hoffmann, Studiendirektor d. Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 318.

Kometen. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. **II:** Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsassessor in Berlin. Nr. 534.

Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre v. Steph. Krehl. I. II. M. viel. Notenbeispiel. Nr. 149, 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung v. Steph. Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Kirsche in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.

Koordinatensysteme v. Paul B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Mit 8 Fig. Nr. 507.

Körper, Der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Kostenanschlag siehe: Veranschlagen.

Kriegsschiffbau. Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat und Schiffbau-Direktor. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe u. der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.

— — II. Teil: Das Zeitalter der Dampfschiffe für die Kriegsführung zur See von 1840 bis zur Neuzeit. Mit 81 Abbildungen. Nr. 472.

Kriegswesens, Geschichte des, von Dr. Emil Daniels in Berlin. **I:** Das antike Kriegswesen. Nr. 488.

— — **II:** Das mittelalterliche Kriegswesen. Nr. 498.

— — **III:** Das Kriegswesen der Neuzeit. Erster Teil. Nr. 518.

— — **IV:** Das Kriegswesen der Neuzeit. Zweiter Teil. Nr. 537.

— — **V:** Das Kriegswesen der Neuzeit. Dritter Teil. Nr. 568.

Kristallographie v. Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbild. Nr. 210.

Kristalloptik, Einführung in die, von Dr. Eberhard Buchwald i. München. Mit 124 Abbildungen. Nr. 619.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Würzburg. Nr. 10.

Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.

Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Kurvendiskussion. Algebraische Kurven von Eug. Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. **I:** Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.

Kurzschrift siehe: Stenographie.

Küstenartillerie. Die Entwicklung der Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart v. Korvettenkapitän Huning. Mit Abbildungen und Tabellen. Nr. 606.

Lacke. Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.

Lagerhäuser. Industrielle und gewerbliche Bauten. (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann, Düsseldorf. **II:** Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.

Länder- und Völkernamen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Landstraßenbau von Kgl. Oberlehrer A. Liebmann, Betriebsdirekt. a. D. i. Magdeburg. Mit 44 Fig. Nr. 598.

Landwirtschaftliche Betriebslehre v. E. Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 227.

Landwirtschaftlichen Maschinen, Die, von Karl Walther, Diplom.-Ing. in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 407—409

Lateinische Grammatik. Grundriß der latein. Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.

— **Sprache. Geschichte der lateinischen Sprache** von Dr. Friedrich Stolz, Professor an der Universität Innsbruck. Nr. 492.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Techn. Hochschule in Wien. M. 47 Abb. Nr. 77.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

— **Fünfstellige,** von Professor August Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Lokomotiven. Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal. **I:** Die Lokomotiven. Mit 89 Abb. im Text u. 2 Tafeln. Nr. 107.

Lothringen. Geschichte Lothringens von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— **Landeskunde v. Elsaß-Lothringen** v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.

Lötrohrprobierkunde. Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohrs von Dr. Mart. Henglein in Freiberg i. Sa. Mit 10 Figuren. Nr. 483.

Lübeck. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck v. Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text und 1 lithographischen Karte. Nr. 487.

Luftelektrizität von Dr. Karl Kähler, wissenschaftlichem Hilfsarbeiter am Königl. Preuß. Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam. Mit 18 Abbildungen. Nr. 649.

Luftsalpeter. Seine Gewinnung durch den elektrischen Flammenbogen von Dr. G. Brion, Prof. an der Kgl. Bergakademie in Freiberg. Mit 50 Figuren. Nr. 616.

Luft- und Meeresströmungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Lüftung. Heizung und Lüftung von Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. **I:** Das Wesen und die Berechnung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.

Lüftung. Heizung und Lüftung von Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. **II:** Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Luther, Martin, und Thom. Murner. Ausgewählt und mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen v. Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor d. Öffentlichen und 1. Sächs. Versuchsstation für Brauerei und Mälzerei, sowie der Brauer- und Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

Maschinenbau, Die Kalkulation im, von Ingenieur H. Bethmann, Doz. am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.

— **Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Fr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maschinenzeichnen, Praktisches, von Ing. Richard Schiffner in Warmbrunn. **I:** Grundbegriffe, Einfache Maschinenteile bis zu den Kuppelungen. Mit 60 Tafeln. Nr. 589.

— — **II:** Lager, Riemen- und Seilscheiben, Zahnräder, Kolbenpumpe. Mit 51 Tafeln. Nr. 590.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Darmstadt. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Dipl.-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. **I:** Materialeigenschaften.— Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Dipl.-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. **II:** Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Prof. am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Ed. Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen Mit vielen Abbild. Nr. 419—421.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Professor A. Lüdicke in Braunschweig. 2 Bändchen. Nr. 340, 341.

Mecklenburg. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck von Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbild. im Text, 16 Taf. und 1 Karte in Lithographie. Nr. 487.

Mecklenburgische Geschichte von Oberlehrer Otto Vitense in Neubrandenburg i. M. Nr. 610.

Meereskunde, Physische, von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher bei d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Meeresströmungen. Luft- u. Meeresströmungen v. Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 27 Abb. u. Tafeln. Nr. 551.

Menschliche Körper, Der, sein Bau u. seine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen u. ihren Legierungen unter besond. Berücksichtigung der Metallmikroskopie v. Prof. E. Heyn u. Prof. O. Bauer a. Kgl. Materialprüfungsamt (Gr.-Lichterfelde) d. K. Techn. Hochschule zu Berlin. **I:** Allgem. Teil. Mit 45 Abb. im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

— — **II:** Spez. Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Metallurgie von Dr. August Geitz in Kristianssand (Norwegen). I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.

Meteore. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. **II:** Kometen, Meteore u. das Sternensystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Meteorologie v. Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Wien. Mit 49 Abbild. u. 7 Tafeln. Nr. 54.

Militärische Bauten von Reg.-Baumeister R. Lang in Stuttgart. Mit 59 Abb. Nr. 626.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an d. Univ. Straßburg i. E. 2 Bde. Nr. 371, 372.

Mineralogie von Geheimer Bergrat Dr. R. Brauns, Prof. an d. Univ. Bonn. Mit 132 Abbild. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterb. von O. Güntter, Prof. an d. Oberrealschule u. an d. Techn. Hochschule i. Stuttgart. Nr. 23.

Mittelhochdeutsche Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitg. u. Wörterbuch herausgeg. von Dr. Hermann Jantzen, Dir. d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Mittelhochdeutsche Grammatik. Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurz. Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. a. d. Univ. Rostock. Nr. 1.

Morgenland. Geschichte des alten Morgenlandes v. Dr. Fr. Hommel, Prof. an d. Universität München. Mit 9 Bildern u. 1 Karte. Nr. 43.

Morphologie und Organographie der Pflanzen v. Prof. Dr. M. Nordhausen i. Kiel. M. 123 Abb. Nr. 141.

Mörtel. Die Industrie d. künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Mundarten, Die deutschen, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.

Mundarten, Plattdeutsche, von Dr. Hubert Grimme, Professor an der Univers. Münster i. W. Nr. 461.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen v. Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther u. Thomas Murner. Ausgewählt u. m. Einleitungen u. Anmerk. versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnas. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, v. Dr. A. Möhler in Steinhaußen. 2 Bdch. Mit zahlr. Abb. u. Musikbeil. Nr. 121 u. 347.

Musikalische Akustik von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbildungen. Nr. 21.

Musikal. Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit viel. Notenbeisp. Nr. 149, 150.

Musikästhetik von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

Musikgeschichte seit Beginn des 19. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

Musiklehre, Allgemeine, von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nahrungsmittel. Ernährung u. Nahrungsmittel v. Oberstabsarzt Prof. H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.

Nautik. Kurzer Abriß d. täglich an Bord von Handelsschiffen angew. Teils d. Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildgn. Nr. 84.

Neugriechisch-deutsches Gesprächsbuch mit besond. Berücksichtigung d. Umgangssprache v. Dr. Johannes Kalitsunakis, Doz. am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 585.

Neunzehntes Jahrhundert. Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univ. Bonn. 1. Bdch.: 1800—1852. Nr. 216.

— — 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. der Univ. in Jena. **I:** Der historische u. kulturgeschichtl. Hintergrund d. Urchristentums. M. 3 Karten. Nr. 325.

— — **II:** Die Religion d. Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit 1 Planskizze. Nr. 326.

Nibelunge Nôt, Der, in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.

Nordische Literaturgeschichte I: Die isländ. u. norweg. Literatur des Mittelalters v. Dr. Wolfg. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 254.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großherzogl. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Öle. Die Fette u. Öle sowie d. Seifen- u. Kerzenfabrikation u. d. Harze, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in d. Chemie, Besprechung einiger Salze u. der Fette und Öle. Nr. 335.

Öle und Riechstoffe, Ätherische, von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Optik. Einführung in d. geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Orientalische Literaturen. Die Literaturen des Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. an d. Universität Wien. **I:** Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.

Orientalische Literaturen. Die Literaturen des Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdoz an d. Universität Wien. **II:** Die Literaturen d. Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.

— **Die christlichen Literaturen des Orients** von Dr. Ant. Baumstark. **I:** Einleitg. — Das christl.-aramäische u. d. kopt. Schrifttum. Nr. 527.

— — **II:** Das christlich-arabische und das äthiopische Schrifttum. — Das christliche Schrifttum der Armenier und Georgier. Nr. 528.

Ortsnamen im Deutschen, Die, ihre Entwicklung u. ihre Herkunft von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig-Gohlis. Nr. 573.

Ostafrika. (Die deutsch. Kolonien III) von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.

Österreich. Österreichische Geschichte von Prof. Dr. Franz v. Krones, neubearb. von Dr. Karl Uhlirz, Prof. a. d. Univ. Graz. **I:** Von d. Urzeit b. z. Tode König Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.

— — **II:** Vom Tode König Albrechts II. bis z. Westf. Frieden (1440—1648). Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.

— **Landeskunde v. Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Prof. an d. Universität Prag. Mit 10 Textillustrationen u. 1 Karte. Nr. 244.

Ovidius Naso, Die Metamorphosen des. In Auswahl mit einer Einleit. u. Anmerk. herausgeg. v. Dr. Jul. Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor d. Pädagog. Seminars a. d. Univ. Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläogeographie. Geolog. Geschichte der Meere und Festländer von Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.

Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt i. Weilburg (Lahn). Nr. 482.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

— **und Abstammungslehre** von Dr. Karl Diener, Prof. an der Univers. Wien. Mit 9 Abbild. Nr. 460.

Palästina. Landes- und Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.

Parallelperspektive. Rechtwinklige u. schiefwinklige Axonometrie v. Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Personennamen, Die deutschen, v. Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.

Petrographie v. Dr. W. Bruhns, Prof. an der Bergakademie Clausthal. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Prof. Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Pflanzenbaulehre. Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Essen u. Ernst Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 232.

Pflanzenbiologie v. Dr. W. Migula, Professor an d. Forstakademie Eisenach. **I:** Allgemeine Biologie. Mit 43 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzenernährung. Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Pflanzengeographie von Professor Dr. Ludwig Diels in Marburg (Hessen). Nr. 389.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedr. Bruck, Privatdoz. i. Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildgn. Nr. 310.

Pflanzenmorphologie. Morphologie u. Organographie d. Pflanzen von Prof. Dr. M. Nordhausen in Kiel. Mit 123 Abbildungen. Nr. 141.

Pflanzenphysiologie von Dr. Adolf Hansen, Prof. an der Universität Gießen. Mit 43 Abbild. Nr. 591.

Pflanzenreichs, Die Stämme des, von Privatdoz. Dr. Rob. Pilger, Kustos am Kgl. Botan. Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abb. Nr. 485.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstak. Eisenach. Mit 50 Abb. Nr. 158.

Pflanzenzellenlehre. Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbildungen. Nr. 556.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assist. a. Botan. Institut d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Pharmazeutische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.

Philologie, Geschichte d. klassischen, v. Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. a. d. Univ. Münster in Westf. Nr. 367.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Bonn. Nr. 281.

Philosophie, Geschichte d., IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. B. Bauch, Professor an der Universität Jena. Nr. 394.

— — **V: Immanuel Kant** von Dr. Bruno Bauch, Professor an d. Universität Jena. Nr. 536.

— — **VI: Die Philosophie im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts** von Arthur Drews, Prof. der Philosophie an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 571.

— **Hauptprobleme der,** v. Dr. Georg Simmel, Professor an der Universität Berlin. Nr. 500.

— **Psychologie und Logik** zur Einf. in d. Philosophie von Prof. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie, Die. Von H. Keßler, Prof. an d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Taf. und 42 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Techn. Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 24 Abbildungen. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht u. Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— — IV. Teil: Elektromagnet. Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.

Physik, Geschichte der, von Prof. A. Kistner in Wertheim a. M. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— — II: Die Physik von Newton bis z. Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Univ. Breslau. Nr. 445.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. der Mathematik u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Rechnen, Kaufmännisches, von Prof. Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs. Erstes Buch: Allg. Teil. I: Einleitung — Lehre v. d. Personen u. v. d. Sachen v. Dr. P. Oertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 447.

— — II: Erwerb u. Verlust, Geltendmachung u. Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.

— Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abt.: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Oertmann, Prof. an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgem. Lehren. Besitz und Eigentum. Nr. 480.

— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Universität Göttingen. Nr. 305.

Recht der Versicherungsunternehmungen, Das, von Regierungsrat a. D. Dr. jur. A. Leibl, erstem Direktor der Nürnberger Lebensversicherungsbank, früher Mitglied des Kaiserlichen Aufsichtsamts für Privatversicherung. Nr. 635.

Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied d. Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Rechtswissenschaft, Einführung in die, von Dr. Theodor Sternberg in Berlin. **I:** Methoden- und Quellenlehre. Nr. 169.

— — **II:** Das System. Nr. 170.

Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Redeschrift siehe: Stenographie.

Reichsfinanzen, Die Entwicklung der, von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 427.

Religion, Die Entwicklung der christlichen, innerhalb des Neuen Testaments von Professor Dr. Lic. Carl Clemen. Nr. 388.

Religion, Die, des Judentums im Zeitalter des Hellenismus u. der Römerherrschaft von Lic. Dr. W. Staerk (Neutestamentliche Zeitgeschichte II.) Mit einer Planskizze. Nr. 326.

Religionen der Naturvölker, Die, von Dr. Th. Achelis, Professor in Bremen. Nr. 449.

Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden, von Professor Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Renaissance. Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Prof. a. d. Universſ. Wien. Nr. 189.

Reptilien. Das Tierreich III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Prof. a. d. Universſ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.

Rheinprovinz, Landeskunde der, von Dr. V. Steinecke, Direktor d. Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.

Riechstoffe. Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abb. Nr. 446.

Roman. Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellm. Mielke. Nr. 229.

Romanische Sprachwissenschaft von Dr. Adolf Zauner, Prof. a. d. Univ. Graz. 2 Bände. Nr. 128, 250.

Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. M. 8 Vollb. Nr. 45.

Römische Geschichte von Realgymnasial-Direktor Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.

Römische Literaturgeschichte von Dr. Herm Joachim in Hamburg. Nr. 52.

Römische und griechische Mythologie von Professor Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.

Römische Rechtsgeschichte von Dr. Robert von Mayr, Prof. an der Deutschen Universſ. Prag. 1. Buch: Die Zeit d. Volksrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 577.

— — 2. Hälfte: Das Privatrecht. Nr. 578.

— 2. Buch: Die Zeit des Amts- und Verkehrsrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 645.

— — 2. Hälfte: Das Privatrecht I. Nr. 646.

— — 2. Hälfte: Das Privatrecht II. Nr. 647.

Rußland. Russische Geschichte von Dr. Wilh. Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

— **Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Professor Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 68.

Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 66.

Russische Handelskorrespondenz von Dr. Theodor von Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.

Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 67.

Russische Literatur von Dr. Erich Boehme, Lektor a. d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa u. Poesie mit ausführlichen Anmerkungen u. Akzentbezeichnung. Nr. 403.

— — II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnungen. Nr. 404.

Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

Russisches Vokabelbuch, Kleines, von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 475.

Sachenrecht. Recht d. Bürgerl. Gesetzbuches. Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat i. Dresden. **I:** Allgemeine Lehren. Besitz u. Eigentum.

— — **II:** Begrenzte Rechte. Nr. 480, 481.

Sachs, Hans. Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

Sachsen. Sächsische Geschichte v. Prof. Otto Kaemmel, Rektor d. Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

— **Landeskunde des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abb. u. 1 Karte. Nr. 258.

Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.

Schattenkonstruktionen von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 236.

Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart, Die Entwicklung der, von Korvettenkapitän Huning. Mit Abbild. und Tabellen. Nr. 606.

Schleswig-Holstein. Landeskunde von Schleswig-Holstein, Helgoland u. der freien und Hansestadt Hamburg von Dr. Paul Hambruch, Abteilungsvorsteher am Museum für Völkerkunde in Hamburg. Mit Abb., Plänen, Profilen und 1 Karte in Lithographie. Nr. 563.

Schleusenbau. Kanal- u. Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abbildungen. Nr. 585.

Schmalspurbahnen (Klein-, Arbeits- u. Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 99 Abbildungen. Nr. 524.

Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univ. Graz. Mit 67 Abb. Nr. 151.

Schreiner-Arbeiten. Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Schuldrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor a. d. Universität Erlangen. Nr. 324.

Schule, die deutsche, im Auslande von Hans Amrhein, Seminar-Oberlehrer in Rheydt. Nr. 259.

Schulhaus. Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbild. II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 443 und 444.

Schulpraxis. Methodik d. Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

Schweiß- und Schneidverfahren, Das autogene, von Ingenieur Hans Niese in Kiel. Mit 30 Fig. Nr. 499.

Schweiz. Schweizerische Geschichte von Dr. K. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.

— **Landeskunde der Schweiz** von Prof. Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abb. und 1 Karte. Nr. 398.

Schwimmanstalten. Öffentl. Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Professor an der Universität Berlin. Nr. 370.

Seerecht, Das deutsche, von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. **I:** Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.

— — **II:** Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und d. Kerzenfabrikation v. Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abbildgn. Nr. 336.

Semitische Sprachwissenschaft von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Univers. Königsberg. Nr. 291.

Serbokroatische Grammatik von Dr. Vladimir Corović, Bibliothekar des bosn.-herzegow. Landesmuseums in Sarajevo (Bosnien). Nr. 638.

Silikate. Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. **I:** Glas u. keramische Industrie. M. 12 Taf. Nr. 233.

— — **II:** Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgeg. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Skandinavien, Landeskunde von, (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinrich Kerp, Kreisschulinspektor in Kreuzburg. Mit 11 Abb. und 1 Karte. Nr. 202.

Slavische Literaturgeschichte von Dr. Josef Karásek in Wien. **I:** Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — **II:** Das 19. Jahrh. Nr. 278.

Soziale Frage. Die Entwicklung der sozialen Frage von Professor Dr. Ferdin. Tönnies. Nr. 353.

Sozialversicherung von Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Spalt- und Schleimpilze. Eine Einführung in ihre Kenntnis von Prof. Dr. Gustav Lindau, Kustos am Kgl. Botanischen Museum und Privatdozent der Botanik an der Universität Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 642.

Spanien. Spanische Geschichte von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.

— **Landeskunde der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

Spanische Handelskorrespondenz von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Spanische Literaturgeschichte v. Dr. Rud. Beer, Wien. I. II. Nr. 167, 168.

Speicher, Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. **II:** Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.

Spinnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

Spitzenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikat. u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule u. an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Staatslehre, Allgemeine, von Dr. Hermann Rehm, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Nr. 358.

Staatsrecht, Allgemeines, von Dr. Julius Hatschek, Prof. d. Rechte an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.

Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. a. d. Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. M. 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.

Statik von W. Hauber, Dipl.-Ing. I. Teil: **Die Grundlehren der Statik starrer Körper.** Mit 82 Fig. Nr. 178.

— — II. Teil: **Angewandte Statik.** Mit 61 Figuren. Nr. 179.

—, **Graphische,** mit besond. Berücksichtig. der Einflußlinien von Kgl. Oberlehrer Dipl.-Ing. Otto Henkel in Rendsburg. 1. Teil. Mit 121 Fig. Nr. 603.

Steinhauerarbeiten. Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.

Stenographie. Geschichte der Stenographie von Dr. Arthur Mentz in Königsberg i. Pr. Nr. 501.

Stenographie n. d. System v. F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.

— **Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems** von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Stenographie. Lehrbuch d. Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang von Professor Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenkorps in Lichterfelde. Nr. 86.

— **Redeschrift.** Lehrbuch der Redeschrift d. Systems Stolze-Schrey nebst Kürzungsbeisp., Lesestücken, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, amtl. bad. Landtagsstenograph in Karlsruhe (B.). Nr. 494.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 66 Fig. Nr. 97.

Sternsystem. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univers. Kiel. **II:** Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Steuersysteme des Auslandes, Die, v. Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Stilkunde v. Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbild. u. 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Stöchiometrische Aufgabensammlung von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberl. an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.

Straßenbahnen von Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 72 Abbildungen. Nr. 559.

Strategie von Löffler, Major im Kgl. Sächs. Kriegsmin. i. Dresd. Nr. 505.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen v. Jos. Herzog, Dipl.-Elektroing. in Budapest u. Clarence Feldmann, Prof. d. Elektotechnik in Delft. Mit 68 Abb. Nr. 456.

Südamerika. Geschichte Südamerikas von Dr. Hermann Lufft. **I:** Das spanische Südamerika (Chile, Argentinien und die kleineren Staaten). Nr. 632.

Südseegebiet. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. K. Dove. M. 16 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 520.

Talmud. Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.

Talmudproben von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 583.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Technische Tabellen und Formeln von Dr.-Ing. W. Müller, Dipl.-Ing. am Kgl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. Mit 106 Figuren. Nr. 579.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke d. Maschinenbaues, Schiffbaues u. d. Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Dtsch.-Engl. Nr. 395.
— — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.
— — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.
— — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.

Technologie, Allgemeine chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg Nr. 113.
— **Mechanische,** v. Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.

Teerfarbstoffe, Die, mit bes. Berücksichtig. der synthetisch. Methoden v. Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule, Dresd. Nr. 214.

Telegraphenrecht v. Postinspektor Dr. jur. Alfred Wolcke in Bonn **I:** Einleitung. Geschichtliche Entwicklung. Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, allgemeiner Teil. Nr. 509.
— — **II:** Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, besonderer Teil. Das Telegraphen-Strafrecht. Rechtsverhältnis d. Telegraphie z. Publikum. Nr. 510.

Telegraphie, Die elektrische, v. Dr. Lud. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments v. Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 272.
— **Die Entstehung des Neuen Testaments** v. Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Textilindustrie. I: Spinnerei und Zwirnerei v. Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt, Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.
— **II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** v. Prof. M. Gürtler, Geh. Regierungsrat i. Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. M. 29 Fig. Nr. 185.
— **III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höheren Fachschule f. Textilindustr. in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. M. 54 Fig. Nr. 242.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre). **Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen** von M. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Nr. 2.

Thüringische Geschichte v. Dr. Ernst Devrient in Leipzig. Nr. 352.

Tierbiologie. Abriß der Biologie der Tiere v. Dr. Heinrich Simroth, Prof a. d. Univ. Leipzig. Nr. 131.

Tiere, Entwicklungsgeschichte der, von Dr. Johs. Meisenheimer, Prof. der Zoologie a. d. Universität Jena. **I:** Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.
— — **II:** Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Tiergeographie v. Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie a. d. Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. a. d. Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere v. Oberstudienr. Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorst. d. Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. M. 15 Abb. Nr. 282.
— **III: Reptilien und Amphibien** von Dr. Franz Werner, Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.
— **IV: Fische** von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Nr. 356.
— **V: Insekten** von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.
— **VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludw. Böhmig, Prof. d. Zool. a. d. Univ. Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.
— — II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. M. 97 Fig. Nr. 440.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Essen. Nr. 228.

Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Figuren auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Togo. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Prof. Dr. Gerh. Hessenberg in Breslau. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Tropenhygiene v. Medizinalrat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Instituts für Schiffs- und Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Trust. Kartell und Trust von Dr. S. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522.

Turnen, Das deutsche, v. Dr. Rudolf Gasch, Prof. a. König Georg-Gymn. in Dresden. Mit 87 Abb. Nr. 628.

Turnkunst, Geschichte der, von Dr. Rudolf Gasch, Prof. a. König Georg-Gymnasium in Dresden. Mit 17 Abbildungen. Nr. 504.

Ungarn. Landeskunde von Österreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Prof. an der Universität Prag. Mit 10 Textillustr. u. 1 Karte. Nr. 244.

Ungarische Literatur, Geschichte der, von Prof. Dr. Ludwig Katona und Dr. Franz Szinnyei, beide an der Universität Budapest. Nr. 550.

Ungarische Sprachlehre v. Dr. Josef Szinnyei, o. ö. Prof. an der Universität Budapest. Nr. 595.

Unterrichtswesen. Geschichte d. deutschen Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. **I.** Teil: Von Anfang an bis zum Ende d. 18. Jahrh. Nr. 275.

— — **II.** Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Untersuchungsmethoden, Agrikulturchemische, von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moritz Hoernes, Professor an der Univ. Wien. Mit 85 Abb. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken d. bildenden Künste u. Photographie v. Staatsanw. Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Urheberrecht, Das deutsche, an literarischen, künstlerischen u. gewerbl. Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Urzeit. Kultur der Urzeit von Dr. Moritz Hoernes, o. ö. Prof. an der Univ. Wien. 3 Bändch. **I:** Steinzeit. Mit 40 Bildergrupp. Nr. 564.

— — **II:** Bronzezeit. Mit 36 Bildergruppen. Nr. 565.

— — **III:** Eisenzeit. Mit 35 Bildergruppen. Nr. 566.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Prof. an der Bergakademie in Clausthal. Mit 16 Fig. Nr. 354.

Veranschlagen, Das, im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch üb. d. Wesen d. Kostenanschlags v. Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Fig. Nr. 385.

Vereinigte Staaten. Landeskunde der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Professor Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädt. Realgymnasium in Berlin. I. Teil: Mit 22 Karten und Figuren im Text und 14 Tafeln. Nr. 381.

— — **II.** Teil: Mit 3 Karten im Text, 17 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 382.

Vergil. Die Gedichte des P. Vergilius Maro. In Auswahl mit einer Einleitung u. Anmerkungen herausgeg. von Dr. Julius Ziehen. **I:** Einleitung und Aeneis. Nr. 497.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. **I:** Feldmessen und Nivellieren. Mit 146 Abb. Nr. 468.

— — **II:** Der Theodolit. Trigonometrische u. barometr. Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 469.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 180.

Versicherungswesen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Professor der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. **I:** Allgemeine Versicherungslehre. Nr. 262.

— — **II:** Die einzelnen Versicherungszweige. Nr. 636.

Völkerkunde v. Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos d. ethnogr. Sammlung d. naturhist. Hofmuseums u. Privatdozent a. d. Univ. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Völkernamen. Länder- u. Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Volksbibliotheken (Bücher- u. Lesehallen), ihre Einrichtung u. Verwaltung v. Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik v. Präsident Dr. R. van der Borght, Berlin. Nr. 177.

Waffen, Die blanken, und die Schutzwaffen, ihre Entwicklung von der Zeit der Landsknechte bis zur Gegenwart m. besonderer Berücksichtigung der Waffen in Deutschland, Österreich-Ungarn und Frankreich von W. Gohlke, Feuerwerks-Major a. D. in Berlin-Steglitz. Mit 115 Abbildungen. Nr. 631.

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Fig. im Text. Nr. 508.

Waldeck. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck von Professor Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer am Realgymnas. in Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide, mit Auswahl a. Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und an der Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

Walzwerke. Die, Einrichtung und Betrieb. Von Dipl.-Ing. A. Holverscheid, Oberlehrer a. d. Kgl. Maschinenbau- u. Hüttenschule in Duisburg. Mit 151 Abbild. Nr. 580.

Warenhäuser. Geschäfts- u. Warenhäuser von Hans Schliepmann, Königl. Baurat in Berlin. **I:** Vom Laden zum „Grand Magasin". Mit 23 Abbildungen. Nr. 655.

— — **II:** Die weitere Entwickelung der Kaufhäuser. Mit 39 Abbildungen. Nr. 656.

Warenkunde von Dr. Karl Hassack, Prof. u. Leiter der k. k. Handelsakademie in Graz. **I.** Teil: Unorganische Waren. M. 40 Abb. Nr. 222.

— — **II.** Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Warenzeichenrecht, Das. Nach dem Gesetz z. Schutz d. Warenbezeichnungen v. 12. Mai 1894. Von Reg.-Rat J. Neuberg, Mitglied des Kais. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretische Physik II. T.: Licht u. Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. Mit 47 Abbildgn. Nr. 77.

Wärmekraftmaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- u. Kältemaschinen von M. Röttinger, Diplom-Ing. in Mannheim. M. 73 Fig. Nr. 2.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Wäscherei. Textilindustrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Prof. an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe v. Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ing. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung v. Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorst. d. landwirtsch. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Wasserinstallationen. Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen v. Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Wasserturbinen, Die, von Dipl.-Ing. P. Holl in Berlin. **I:** Allgemeines. Die Freistrahlturbinen. Mit 113 Abbildungen. Nr. 541.

Wasserturbinen, Die, von Dipl.-Ing. P. Holl in Berlin. **II:** Die Überdruckturbinen. Die Wasserkraftanlagen. Mit 102 Abbildgn. Nr. 542.

Wasserversorgung der Ortschaften v. Dr.-Ing. Robert Weyrauch, Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Fig. Nr. 5.

Weberei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wechselstromerzeuger von Ing. Karl Pichelmayer, Prof. an der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 40 Figuren. Nr. 547.

Wechselwesen, Das, v. Rechtsanw. Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

Wehrverfassung, Deutsche, von Geh. Kriegsrat Karl Endres, vortr. Rat i. Kriegsminist. i. München. Nr. 401.

Werkzeugmaschinen für Holzbearbeitung, Die, von Ing. Professor Hermann Wilda in Bremen. Mit 125 Abbildungen. Nr. 582.

Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung, Die, von Ing. Prof. Hermann Wilda in Bremen. **I:** Die Mechanismen der Werkzeugmaschinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaschinen. Mit 319 Abb. Nr. 561.

— — **II:** Die Bohr- und Schleifmaschinen. Die Hobel-, Shaping- u. Stoßmaschinen. Die Sägen u. Scheren. Antrieb u. Kraftbedarf. Mit 199 Abbild. Nr. 562.

Westpreußen. Landeskunde der Provinz Westpreußen von Fritz Braun, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Graudenz. Mit 16 Tafeln, 7 Textkarten u. 1 lith. Karte. Nr. 570.

Wettbewerb, Der unlautere, von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. **I:** Generalklausel, Reklameauswüchse, Ausverkaufswesen, Angestelltenbestechung. Nr. 339.

— — **II:** Kreditschädigung, Firmen- und Namenmißbrauch, Verrat von Geheimnissen, Ausländerschutz. Nr. 535.

Wirbellose Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. d. Zoologie an der Univ. Graz. **I:** Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen u. Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— — **II:** Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter u. Manteltiere. Mit 97 Fig. Nr. 440.

Wirkerei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wirtschaftlichen Verbände, Die, v. Dr. Leo Müffelmann in Rostock. Nr. 586.

Wirtschaftspflege. Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsass. in Berlin. Nr. 534.

Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Prof. der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. **I:** Das Wohnungswesen in der modernen Stadt. Nr. 495.

— — **II:** Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches,** von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

— **Technisches,** enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.

— — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.

— — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.

— — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.

Württemberg. Württembergische Geschichte v. Dr. Karl Weller, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 462.

Württemberg. Landeskunde des Königreichs Württemberg von Dr. K. Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. im Text. Nr. 58.

Zeitungswesen, Das deutsche, von Dr. R. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.

Zeitungswesen, Das moderne, (Syst. d. Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Zeitungswesen, Allgemeine Geschichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbild. Nr. 556.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der Königl. Baugewerkschule in Münster i. Westf. Mit 132 Fig. Nr. 57.

Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. **I:** Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken und Deckenbildungen, hölz. Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengwerke. Mit 169 Abbildungen. Nr. 489.

— — **II:** Dächer, Wandbekleidungen, Simsschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.

Zivilprozeßrecht, Deutsches, von Prof. Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.

Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Städtischen Chem. Laboratoriums Stuttgart. Nr. 109.

Zwangsversteigerung, Die, und die Zwangsverwaltung von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. Nr. 523.

Zwirnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königlichen Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

In unserm Verlag erschien soeben:

Geschichte der Aufteilung und Kolonisation Afrikas seit dem Zeitalter der Entdeckungen

Erster Band: 1415—1870

Von Dr. Paul Darmstädter
Professor an der Universität Göttingen

Broschiert M. 7.50, gebunden M. 9.50

Das Buch beabsichtigt, in kurzen Zügen, durchweg an der Hand der Quellen, einen Überblick über die Geschichte der Aufteilung und Kolonisation Afrikas, vom Zeitalter der Entdeckungen bis in unsere Tage zu geben. Wie der Titel andeutet, ist die Aufgabe eine doppelte: es soll die Aufteilung des Erdteils geschildert werden, ein Vorgang, der sich zum großen Teil in Europa abgespielt hat und ein wichtiges Kapitel der Weltgeschichte der neueren Zeit bildet; es soll dabei gezeigt werden, wie die Wertschätzung Afrikas in der Meinung der europäischen Völker jeweils eine verschiedene gewesen ist, natürlich unter dem Einfluß der herrschenden kolonialpolitischen Anschauungen, und wie dadurch der mehr oder minder rasche Gang der Aufteilung bestimmt wurde. Dann aber soll auch die Kolonisation, die Verwaltung und Ausnutzung der von den europäischen Nationen in Besitz genommenen Gebiete dargestellt und gezeigt werden, welche Bedeutung die afrikanischen Kolonien für die europäischen Völker gewonnen haben.

Der vorliegende erste Band behandelt die Epoche der portugiesischen Vorherrschaft (15. und 16. Jahrhundert), die Geschichte Afrikas in der Zeit des Sklavenhandels (17. und 18. Jahrhundert), und ausführlicher den Zeitraum vom Ende des 18. Jahrhunderts bis 1870, in dem namentlich die Darstellung der ägyptischen Expedition Napoleons sowie die Geschichte Algeriens und Südafrikas Interesse erwecken werden. In einem zweiten Bande soll die Geschichte der Aufteilung und Kolonisation Afrikas bis in die unmittelbare Gegenwart fortgeführt werden. Ein beträchtlicher und nicht unwichtiger Teil der Geschichte der neuesten Zeit — es sei nur an Tunis und Ägypten, Tripolis und Marokko, die Gründung des Kongostaats und der deutschen Kolonien, den Burenkrieg und die Einigung Südafrikas erinnert — wird in dem Buche zur Darstellung gelangen, das ebenso dem Kolonialpolitiker wie dem Historiker zu dienen bestimmt ist.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H. Berlin W 35 und Leipzig

In unserm Verlag erschien ferner:

Der deutsche Student

Von

Prof. Dr. Theobald Ziegler

Elfte und zwölfte Auflage

Gebunden M. 3.50

Diese „Studentenpredigten", wie sie Paulsen genannt hat, haben sich unter der studierenden Jugend viele Freunde erworben. Und so war es nicht zu verwundern, daß das Buch seit seinem Erscheinen fast alljährlich eine neue Auflage erlebte. Herausgewachsen war es aus der fin-de-siècle-Stimmung vor der Jahrhundertwende, die besonders in studentischen Kreisen die Herzen höher schlagen und das Blut rascher kreisen ließ, eben deswegen aber auch nach besonnener Führung sich sehnte. Eine solche fanden sie hier. Den Auflagen im neuen Jahrhundert fügte der Verfasser eine Nachtragsvorlesung hinzu zur Überleitung in ruhigere Bahnen und zur Ergänzung durch manches inzwischen Neugewordene. Im Winter 1905/06 aber hat er in Straßburg die Vorlesung über den deutschen Studenten noch einmal gehalten und hier vor allem die Vorgänge jener bewegten Zeit, des sogenannten „Hochschulstreites" und des Kampfes gegen die konfessionellen Korporationen freimütig und kritisch besprochen. Der neuen Auflage ist die Vorlesung in dieser späteren Fassung, wenigstens in der ersten größeren Hälfte, zugrunde gelegt worden. Die fin-de-siècle-Stimmung ist verschwunden, dafür sind die Probleme, die das Studentenleben im ersten Jahrzehnt des 20sten Jahrhunderts bewegt haben und bewegen, in den Vordergrund gerückt und so das Buch durchaus modernisiert und wieder ganz aktuell geworden. Dabei hat es eine nicht unbeträchtliche Erweiterung erfahren. Und doch ist der Geist des Buches der alte geblieben, es ist der Geist der Freiheit, die als akademische Studenten und Professoren gleichmäßig am Herzen liegt, und der Geist eines kräftigen sittlichen Idealismus, der sich nicht fürchtet, Jünglinge zu wagen, damit Männer aus ihnen werden. Und auch der alte gute Freund des deutschen Studenten ist der Verfasser geblieben, der ihn versteht, weil er ihn liebt. Das zeigt gleich von vornherein die Widmung des Buches an die Straßburger Studentenschaft. So ist es beim Abgang Zieglers von Straßburg zu einem Vermächtnis an seine jungen Freunde auf allen deutschen Hochschulen geworden, und soll nun auch in der neuen Gestalt wieder vielen eine Hilfe werden und ein Halt.

Roßberg'sche Buchdruckerei, Leipzig